

Spazi vettoriali, matrici, determinanti

1. Verificare che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}^+$ (l'insieme dei numeri reali positivi) non è uno spazio vettoriale.
3. Verificare che l'insieme $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
4. Dato lo spazio vettoriale V e k vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, dimostrare che l'insieme delle combinazioni lineari di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ è un sottospazio vettoriale di V .
5. Dati $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$, proporre, magari aiutandosi con considerazioni visive, un vettore $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano linearmente indipendenti. Successivamente dimostrare tale lineare indipendenza.
6. Riferendosi all'esercizio precedente, è possibile trovare un vettore $\vec{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ siano linearmente indipendenti?
7. Dire perchè i vettori $\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (\sqrt{2}, e, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (3, 1/2, \ln 2, -2)$, $\vec{v}_4 = (0, 2, -2, 2)$ non possono costituire una base di $\mathbb{R}^4$.
8. Data la base di $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$, ove $\vec{f}_1 = (2, 2)$ e $\vec{f}_2 = (1, 2)$, e dato il vettore $\vec{v} = (-1, -3)$, determinare $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2)$. Ovvero determinare le componenti a_1, a_2 di $\vec{v}$ sulla base $\mathcal{B}$.
9. Sia P_5 lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 e sia $\mathcal{C} := \{e_0, e_1, \dots, e_5\}$ la base data dai polinomi $e_i(x) := x^i$ (con $i = 0, 1, \dots, 5$). Definendo $p(x) := -2x^5 + 3x^3 - x^2 + 4x$, determinare $[p]_{\mathcal{C}}$, cioè le componenti di p sulla base $\mathcal{C}$.
10. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\vec{f}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{f}_2 = (0, 2, 1)$ e $\vec{f}_3 = (0, 2, -1)$. Determinare le componenti del vettore $\vec{v} = (2, -4, 6)$ sulla base $\mathcal{B}$, ovvero il vettore $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.
11. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

effettuare tutti i possibili prodotti di due matrici.

12. Trattando $\vec{v} = (1, 2, 0)$ dapprima come vettore colonna e poi come vettore riga, eseguire i prodotti $A\vec{v}$ e $\vec{v}A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Avendo definito

$$D(2, 2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

si verifichi che $D(2, 2)$ è uno spazio vettoriale (i cui elementi si dicono *matrici diagonali* 2×2). Inoltre, si dimostri che $\forall A, B \in D(2, 2)$, si ha $AB = BA$.

14. **[Un po' più difficile degli altri]** Senza darne dimostrazione, individuare una base di $M(m, n)$, lo spazio delle matrici $m \times n$.

15. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

16. Calcolare le inverse delle seguenti matrici (quando esistono):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Date

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix},$$

e definita $M = ABA^3CBC^{-1}B^{-1}$, determinare $\det M$.

18. **[Un po' più difficile degli altri]** In questo esercizio daremo una dimostrazione non rigorosa, ma convincente, che, se una matrice $A \in M(n, n)$ ha due righe che sono una un multiplo dell'altra, allora $\det A = 0$.

Si cominci dimostrando l'affermazione nel caso 2×2 .

Passando al caso 3×3 , si assuma che le due righe mutuamente multiple siano la prima e la seconda, e si calcoli il determinante sviluppando rispetto alla terza riga. Cosa si può dire dei tre minori complementari che si hanno? L'asserto precedente può aiutare?

Avendo capito la "dimostrazione" nel caso 3×3 , si è in grado di spiegare oralmente come procedere poi nei casi a dimensione maggiore?