16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2008/09
Esercizi di ripasso, foglio n. 4

Autovalori, autovettori

1. Per ciascuna delle seguenti matrici, calcolare tutti gli autovalori ed autovettori (cioè il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti che si possono trovare). Per gli autovalori complessi non procedere al calcolo degli autovettori.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Determinare gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sapendo che uno di essi è 5. Determinare poi tutti gli autovettori.

3. Scrivere la matrice $A \in M(5,5)$ i cui elementi sono dati da $a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i \le j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$.

   Trovare gli autovalori di A. Si è capaci di generalizzare questa soluzione al caso analogo ma di dimensioni $n \times n$?

4. Sia A una matrice $n \times n$ di cui $\bar\lambda$ è un autovalore. Dimostrare che l'insieme di tutti gli autovettori relativi a $\bar\lambda$ (aggiungendo eccezionalmente anche il vettore nullo) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5. Dimostrare che la matrice $A \in M(n,n)$ è invertibile se e solo se 0 non è uno dei suoi autovalori.

6. Fissato $0 \le \alpha < 2\pi$, determinare gli autovalori di R_α, la matrice di rotazione di angolo α nel piano. Per gli α per cui questi autovalori risultano reali, determinare anche gli autovettori.

7. **[Un po' più difficile degli altri]** In questo esercizio spiegheremo ancora meglio, rispetto a quanto detto a lezione, cosa significa *diagonalizzare una matrice*. Si assuma che la matrice $A \in M(n,n)$ possiede una base $\mathcal{B} := \{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n\}$ di autovettori (con i corrispondenti autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, i quali possono essere in parte ripetuti). Sia C la matrice $n \times n$ formata dai vettori colonna $\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n$ (cioè, l'i-esima colonna di C è il vettore colonna $\vec v_i$). È un fatto, che non dimostriamo, che la matrice C è invertibile.

   Dimostrare che la matrice $\Lambda := C^{-1}AC$ è la matrice diagonale che contiene sulla diagonale i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (ovvero, Λ è la matrice rappresentativa di L_A sulla base $\mathcal{B}$).

   [Suggerimento: Per conoscere gli elementi della matrice Λ, come per ogni matrice, è sufficiente calcolare $\Lambda\vec e_i$. D'altra parte $C\vec e_i =$? $C^{-1}\vec v_i =$?]

8. Sia V lo spazio di tutte le funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $D : V \longrightarrow V$ l'operatore di derivazione che agisce su V (cioè $D(f) = f'$). Fissato $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_a(x) := e^{ax}$. Essa, in quanto elemento dello spazio vettoriale V, può essere considerata un vettore di V. Si verifichi che f_a è un autovettore della trasformazione lineare D. (Un'altra maniera di dire questa cosa è: f_a è un'*autofunzione* di D.)