

Intorni, limiti e continuità

1. Dire se i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (con n che varia da domanda a domanda) sono aperti, chiusi, o nessuno dei due:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x - 2\}$

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2, |y| \leq 1\}$

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| < 2, |y - 2| \leq 1\}$

(d) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$

(e) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$

2. Dimostrare che l'unione di due insiemi aperti è un insieme aperto.
3. Dimostrare che l'intersezione di due insiemi aperti è un insieme aperto.
4. Usare gli esercizi precedenti per dimostrare che sia l'unione che l'intersezione di due insiemi chiusi sono insiemi chiusi.
5. In $\mathbb{R}^2$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q}^2 = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$.
6. In $\mathbb{R}^3$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $U((0, 0, 0), 1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, cioè la sfera aperta di centro l'origine, raggio 1, privata dell'origine.
7. **[Più difficile degli altri]** Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ottenga l'insieme B togliendo da A un numero finito di punti. Dimostrare che A e B hanno gli stessi punti di accumulazione.
8. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni. Nei casi bidimensionali, disegnarlo sul piano (x, y) .

(a) $f(x, y) = e^{xy+y}$

(b) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + 3z) + \sqrt{y}$

(c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(d) $f(x, y) = \frac{\arctan(x^2y + 3x)}{x^4 + 3y^2}$

(e) $f(x, y) = \ln(x - 2y)$

(f) $f(x, y) = \frac{y}{e^{xy} - 1}$

(g) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^4 + \sqrt{x_4}}$

9. Usando la definizione di limite, dimostrare rigorosamente che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (x^2 + y^2 - 4y) = -4$.
10. Trovare i limiti indicati (che possono essere anche $\pm\infty$):

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{\log_{10}(x + y^2)}{\sqrt{x + y}}$

- (b) $\lim_{(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (0, 0, -1, 4)} \frac{3}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^4 + \sqrt{x_4}}$
- (c) $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
- (d) $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{e^{xz+y}}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$
- (e) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (f) $\lim_{(x, y) \rightarrow (-1, -1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$
- (g) $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 0, \pi)} \tan \left(\frac{2y + z}{4x - 3y} \right)$

11. Usando un metodo simile a quello visto a lezione, dimostrare che $\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$.