

Derivabilità e differenziabilità

1. Date le seguenti funzioni a due o più variabili, calcolare le derivate parziali indicate:

(a) $f(x, y) = x^2 + \tan(xy)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$$

(b) $f(x, y, z) = \sin x + x \log_{10}(y^2 + z)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) =$$

(c) $f(x, y) = e^{xy^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$$

2. Spiegare perché la f è differenziabile nel punto P indicato. Inoltre trovare df_P , il differenziale della f in P :

(a) $f(x, y) = x^2 + xy^4$; $P = (1, 2)$

(b) $f(x, y, z) = \ln(x - 3y^3 + z^2)$; $P = (1, 0, 1)$

(c) $f(x, y, z) = \sin(xyz) + \tan(x^3 + y - z)$; $P = (1, \pi, 1)$

(d) $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \|\vec{x}\|$; $P = (1, 1, \dots, 1)$

3. **[Ripasso di Matematica 1]** Per le seguenti funzioni di una variabile, scrivere l'equazione $y = \ell(x)$ della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x)$ che la $\ell(x)$ nei punti x_1, x_2 , ecc. indicati.

(a) $f(x) = \sin x$; $x_0 = 0$; $x_1 = \pi/6$, $x_2 = 0.1$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 4$; $x_1 = 4.1$, $x_2 = 4.01$, $x_3 = 4.001$

4. Per le seguenti funzioni di due variabili, scrivere l'equazione $z = p(x, y)$ del piano tangente al grafico di f nel punto (x_0, y_0) indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x, y)$ che la $p(x, y)$ nei punti (x_i, y_i) indicati ($i \geq 1$).

(a) $f(x, y) = x^2 + y^4$; $(x_0, y_0) = (1, 1)$; $(x_1, y_1) = (1.1, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 1.1)$, $(x_3, y_3) = (1.01, 1.01)$

(b) $f(x, y) = e^{xy^2}$; $(x_0, y_0) = (1, 0)$; $(x_1, y_1) = (1, -0.1)$, $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$

(c) $f(x, y) = 2x - 3y + 1$; $(x_0, y_0) = (2, 1)$; $(x_1, y_1) = (2.1, 0.9)$, $(x_2, y_2) = (2.01, 0.99)$, $(x_3, y_3) = (2.001, 0.999)$

5. Calcolare $\vec{\nabla} f(P)$, cioè il gradiente della f nel punto P .

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{y + 1}; \quad P = (1, 0)$

(b) $f(x, y, z) = \cos(x + y^2 + \pi z^3) + z \tan(x^2 - y); \quad P = (0, 0, 1)$

(c) $f(x, y, z, t) = x^2 y^3 z t^{-2}; \quad P = (\sqrt{3}, -1, 3, \sqrt[3]{2})$

(d) $f(x, y, z) = \frac{2}{(x + y + z)^3}; \quad P = (x, y, z)$

(e) $f(x, y, z) = \frac{\arctan(x^4 y + x)}{z^2 + 1}; \quad P = (x, y, z)$

6. Per le seguenti funzioni scrivere il differenziale e il gradiente (in un punto generico).

(a) $f(x, y) = \ln(\sin x + e^{xy})$

(b) $f(x, y) = \arctan(e^x + 2xy + y^3)$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{xy}{1 + z^3}}$

(d) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k^k\right)$