

## Derivate direzionali, punti critici, ottimizzazione

1. Calcolare la derivata direzionale di  $f$  in  $P$ , nella direzione di  $\vec{v}$ :

(a)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{y + 1}$ ;  $P = (1, 0)$ ;  $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b)  $f(x, y) = e^{xy} + 2x$ ,  $P = (1, 0)$ ;  $\vec{v} = (-1, 2)$

(c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ;  $P = (1, 1, 1)$ ;  $\vec{v} = (0, 2, -2)$

2. Calcolare le seguenti derivate direzionali di  $f(x, y) = x^2 + xy^4$  nel punto  $P = (1, 2)$ :

(a) nella direzione del segmento orientato  $\vec{PQ}$ , dove  $Q = (2, 1)$ ,

(b) nella direzione da  $P$  verso l'origine.

3. Trovare il vettore unitario  $\vec{u}$  tale che sia massima la derivata direzionale  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$  nel punto  $P$ . Calcolare tale derivata direzionale.

(a)  $f(x, y) = \sin(2x - y)$ ;  $P = (0, 0)$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2y - x}$ ;  $P = (1, 2)$

(c)  $f(x, y, z) = \frac{2}{(x + y + z)^3}$ ;  $P = (2, 1, -1)$

(d)  $f(x, y) = \cos(x^2 + 2y^2)$ ;  $P = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

4. Trovare tutti i punti critici delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - 3y^2 - z^2$

(b)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$

(c)  $f(x, y) = \sin x(e^y + e^{-y})$

(d)  $f(x, y, z) = x^4 - 2x^3 + y^2$  [Non è un errore:  $f$  non dipende esplicitamente da  $z$ .]

(e)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$

5. Trovare e classificare, con il metodo dell'hessiana, tutti i punti critici delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

(b)  $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - 3y^2 - z^2$

(c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2$

(d)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

(e)  $f(x, y) = \sin x(e^y + e^{-y})$ , definita su  $D(f) = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ .

(f)  $f(x, y, z) = \arctan(x^2) + e^{y^2 + z^2}$ .

6. Disegnare il grafico di  $f(x, y) = 1 - x^2$  nello spazio tridimensionale. Individuare tutti i punti critici della  $f$  e decidere se sono di massimo (relativo o assoluto), minimo (relativo o assoluto) o sella.
7. Trovare i cinque punti critici di  $f(x, y) = \sin x \sin y$ , supponendo la  $f$  definita sul quadrato aperto  $Q = \{(x, y) \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$ . Inoltre, ragionando sulla forma particolare di  $f(x, y)$ , dedurre quali di questi punti sono di massimo o di minimo relativo (relativo o assoluto).
8. Le seguenti funzioni hanno  $(0, 0)$  come unico punto critico. Verificare che il metodo dell'hessiana è inconcludente per deciderne la natura. Ciononostante, spiegare perché, in entrambi i casi, si tratta di un punto di sella:
- (a)  $f(x, y) = x^4 + y^3$
- (b)  $f(x, y) = x^3y^5$
9. In  $\mathbb{R}^3$  si chiami  $\sigma$  il piano di equazione  $z = x + 2y - 1$  e  $Q$  il punto  $(2, 3, 1)$ . Si calcoli la minima distanza di  $\sigma$  da  $Q$ , cioè la minima distanza  $\overline{PQ}$  al variare del punto  $P = (x, y, x + 2y - 1)$  in  $\sigma$ .
10. **[Un po' più difficile degli altri]** Un negozio di ferramenta vende due tipi di chiodi, il tipo X e il tipo Y. Ricerche di mercato hanno mostrato che se il negozio fissa il prezzo dei chiodi X a  $x$  euro/chilo e quello dei chiodi Y a  $y$  euro/chilo, venderà (approssimativamente) ogni settimana  $16 - 20x + 8y$  chili di chiodi X e  $4 + 12x - 7y$  chili di chiodi Y. Si sa che il negozio compra dal fornitore i chiodi X a 2 euro/chilo e i chiodi Y a 4 euro/chilo. Determinare i due prezzi di vendita  $x$  e  $y$  che massimizzano il profitto del negozio.
11. Si considera una certa pianura molto estesa la quale, con un determinato sistema di riferimento, può essere immaginata come il piano  $(x, y)$ . Si è osservato che in questa pianura la velocità del vento nel punto  $(x, y)$  è mediamente data da

$$\vec{v}(x, y) = \left( K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \cos(x - y), K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \sin(x - y) \right),$$

ove  $K$  è una certa costante il cui valore è ininfluenza ai fini dell'esercizio. (Si noti che  $\vec{v}(x, y)$  è una velocità vettoriale, quindi  $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). In che punto del piano è più opportuno piazzare una pala eolica?

*[Suggerimento: La direzione del vento non è importante: è la sua intensità che conta.]*