16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2008/09
Esercizi di ripasso, foglio n. 9

Equazioni differenziali

1. Risolvere per integrazione diretta i seguenti problemi di Cauchy.

   (a) $y'(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}; \quad y(0) = 1$

   (b) $y' = \tan x; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

   (c) $y' = -\dfrac{1}{x^2}; \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$

   (d) $y''(x) = e^{x/2}; \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 3$

2. Risolvere (cioè trovare la soluzione generale per) le seguenti equazioni differenziali con il metodo della separazione delle variabili.

   (a) $y' = xy^2$

   (b) $y'(x) = 1 + [y(x)]^2$

   (c) $\dfrac{y^2}{\cos x}\dfrac{dy}{dx} = -1$

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del prim'ordine.

   (a) $y'(x) = -x^2\, y(x)$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

   (c) $y' = (\sin x)y + 2\sin x$

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

   (a) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$

   (b) $y^{(4)} = y$

   (c) $4y'' + 4y' + y = 0$

   (d) $y'' - y = 3$

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali.

   (a) $y' = \dfrac{3y}{x} + 2x^4$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -6\,\dfrac{dy}{dx} - 11$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

   (e) $2y''' - 6y'' + 8y = 0$

   (f) $y' = (\tan x)y + \sin(2x), \quad$ sull'intervallo $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

6. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y''(x) + y(x) = e^x$$

[Suggerimento: Provare la soluzione particolare $y_{pno}(x) = Ae^x$, dove la costante A dovrà essere opportunamente fissata.]

7. Fissare le costanti $A, B \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $y_{pno}(x) = A\cos x + B\sin x$ sia una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 4y' + 3y = \cos x.$$

Usando poi l'esercizio 4a, scrivere la soluzione generale $y_{gno}(x)$.

8. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

(a) $y'(x) = 1 + [y(x)]^2; \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{x^3}; \quad y(1) = 1$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (\ln x)y; \quad y(1) = \dfrac{2}{e}$

(d) $y' + y - x = 0; \quad y(0) = 0$

(e) $\sqrt{1-x^2}\,(\cos y)\,y' = -x; \quad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

(f) $y'' - 6y' + 9y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

9. Si osserva in molti casi che, se si mettono a contatto due oggetti con temperature diverse, la differenza d fra le loro temperature diminuisce con un tasso proporzionale a d stesso. In formula,

$$d'(t) = -k\,d(t),$$

dove t è il tempo espresso in secondi, $d'(t)$ è le derivata di d rispetto a t e k è una costante positiva. Dimostrare che $d(t)$ tende a zero esponenzialmente.
Fissando $k = 10^{-2}\,\mathrm{sec}^{-1}$, se i due oggetti hanno inizialmente (a $t = 0$) temperature 50 C e 20 C, rispettivamente, dopo quanti secondi avranno una differenza di temperatura pari a 3 C?

10. In questo esercizio dimostreremo che, se si tiene conto della resistenza dell'aria, non è vero che un grave cade con una velocità linearmente crescente nel tempo, ovvero secondo la ben nota legge $z(t) = C_1 + C_2 t - (g/2)t^2$.
Sia $z = z(t)$ la coordinata verticale di un certo oggetto di massa m, sottoposto alla forza di gravità $-mg$ (ove $g > 0$ è la costante di accelerazione gravitazionale della terra e t è il tempo, espresso solitamente in secondi). Si sperimenta che, se $z'(t)$ è la velocità verticale del grave, la resistenza dell'aria produce su di esso una forza circa uguale a $-\alpha z'(t)$, dove α è una costante positiva che dipende, fra le altre cose, dalla forma dell'oggetto (il segno meno nell'espressione appena data è dovuto al fatto che la forza è ovviamente orientata in senso contrario alla velocità). Mettendo tutte queste informazioni nella legge di Newton si ottiene

$$mz''(t) = -mg - \alpha z'(t).$$

Trovare la soluzione generale $z_g(t)$ di questa equazione differenziale e dimostrare che, indipendentemente dai valori dei parametri inseriti in $z_g(t)$, si ha sempre che $\lim\limits_{t\to+\infty} z'(t) = -mg/\alpha$.

[Suggerimento: Definire $v(t) = z'(t)$.]