16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2008/09
Esame scritto, 3 giugno 2009

Nome: ______________________

Cognome: ______________________ Punteggio: [ ]

Matricola: ______________________

ISTRUZIONI: *Su questo foglio vanno scritte **tutte le soluzioni ottenute e solo quelle**, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.**: una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.*
Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [**15 pt**] Dati i vettori tridimensionali $\vec{v} = (a, 2, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, -2)$,
   (a) determinare per quali valori di a essi sono ortogonali.

   (b) Per $a = 1$ calcolare l'angolo formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2. [**25 pt**] Della trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si sa che $L(\vec{e}_1) = (1, 1)$ e $L(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (0, -2)$.
   (a) Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica:

   (b) Dire se L è invertibile e perché:

   (c) Se L è invertibile, dare la matrice rappresentativa di L^{-1} (sempre rispetto alla base canonica).

3. [**25 pt**] Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. **[15 pt]** Sappiamo da un esercizio di ripasso che, se una matrice $A \in M(n,n)$ è diagonalizzabile (cioè ammette una base di autovettori), allora esiste una matrice invertibile $C \in M(n,n)$ tale che $\Lambda = C^{-1}AC$ è la matrice diagonale che ha in diagonale tutti gli autovalori (ciascuno ripetuto secondo la sua molteplicità algebrica).

   Si usi questo risultato per dimostrare che, se A è diagonalizzabile, il determinante di A è il prodotto dei suoi autovalori (ciascuno ripetuto secondo la sua molteplicità algebrica).

   [Suggerimento: Non c'è affatto bisogno di aver risolto l'esercizio di ripasso per poter risolvere questo esercizio.]

5. **[15 pt]** Data la funzione $g(x,y,z,t) = \cos(x^2+y) + e^{z^2 t}$,

   (a) scriverne il differenziale in un punto generico:

   (b) Calcolare la direzione di massima derivata (direzionale) nel punto $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (0,0,1,2)$:

6. **[15 pt]** Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \ln(x + x^2 y)$ nel punto $(1,2)$.

7. **[20 pt]** Sia D la regione del piano (x,y) delimitata dalle curve $x = y^2$ e $x = 1$. Calcolare $\displaystyle\int_D 2xy^2\,dxdy =$

8. **[15 pt]** Si consideri l'integrale doppio

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} e^{-x^2} dx\ dy.$$

   Questo corrisponde a $I = \int_D e^{-x^2}\,dxdy$ per una certa regione del piano D. Si disegni D. Inoltre, invertendo l'ordine di integrazione (cioè usando sezioni verticali invece che orizzontali) si calcoli I.

9. **[15 pt]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 3y \\ y(1) = 4 \end{cases}$$