16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2008/09
Esame scritto, 16 giugno 2009

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________ Punteggio: [ ]

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI: *Su questo foglio vanno scritte* ***tutte le soluzioni ottenute e solo quelle****, nello spazio dell'esercizio corrispondente (****n.b.:*** *una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare* ***tutti*** *i fogli usati durante il compito.*
Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. **[20 pt]** Dati i vettori tridimensionali $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)$, usando considerazioni geometriche, trovare un vettore $\vec{v}_3$ tale che la collezione $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sia una base di $\mathbb{R}^3$. Darne una dimostrazione.

2. **[15 pt]** Dimostrare che le tre funzioni $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$ sono linearmente indipendenti nello spazio F di tutte le funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

3. **[10 pt]** Trovare la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica) della trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $L(x, y, z) = x + 2y$.

   [Suggerimento: $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^1$ *sono la stessa cosa.]*

4. **[25 pt]** Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. **[20 pt]** Calcolare i seguenti limiti, se esistono:

   (a) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2+yz)}{x^2+yz} =$

   (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+2x^2y^2}{x^2+y^2} =$

6. **[20 pt]** Definendo $f(x,y) = e^{xy}$,

   (a) scrivere il differenziale di f nel generico punto (x,y):

   (b) trovare tutti i punti critici di f:

   (c) classificare ciascun punto critico:

7. **[15 pt]** Calcolare $\displaystyle \int_{[0,1]^2} xy(x+y)\,dxdy.$

   [La notazione $[0,1]^2$ *equivale a* $[0,1]\times[0,1]$*.]*

8. **[15 pt]** Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + x^6 + 1.$

9. **[20 pt]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{xe^{-x^2}}{2y^3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$