16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2008/09

Esame scritto, 13 gennaio 2010

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **tutte le soluzioni ottenute e solo quelle**, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [20 pt] Dimostrare che, per tutti i $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, si ha $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$.

2. [15 pt] Scrivere e disegnare il dominio naturale delle seguenti funzioni di due variabili:

(a) $f(x, y) = \log(1 - x^2y)$

(b) $f(x, y) = \sqrt[4]{3 - x^2 - y^2}$

3. [25 pt] Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4. [20 pt] Si consideri l'integrale doppio $I = \int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 \cos(\pi y^2) dy dx$. Questo corrisponde a $I = \int_D \cos(\pi y^2) dx dy$ per una certa regione del piano D . Si disegni D . Inoltre, invertendo l'ordine di integrazione (cioè usando sezioni orizzontali invece che verticali) si calcoli I .

5. [15 pt] Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \cos z$, nel punto $P = (1, -1, 0)$ e nella direzione che va verso l'origine.

Determinare poi la direzione di massima derivata di f in P .

6. [20 pt] Sia R il quadrilatero di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(1, 2)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$ e $(1, 4)$. Calcolare $\int_R 2(x + y) dx dy$.

7. [25 pt] Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali

(a) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

(b) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 8$

8. [20 pt] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2 + 1}{\cos y} \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$