

Trasformazioni lineari

1. Sia $R_\alpha \in M(2, 2)$ la matrice di rotazione di angolo (antiorario) α nel piano. Dimostrare che $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.

È vero o falso che, restringendoci alle sole matrici di rotazione nel piano, il prodotto di due matrici è commutativo (cioè l'ordine non conta)?

2. Sia R_α la matrice di rotazione di angolo α nel piano. Dati due generici vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di $\mathbb{R}^2$ dimostrare che:

(a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (R_\alpha \vec{v}) \cdot (R_\alpha \vec{w})$;

(b) $\|R_\alpha \vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

3. Utilizzare l'esercizio precedente per completare la dimostrazione che, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo compreso fra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$. (A lezione la formula era stata dimostrata nel solo caso $\vec{v} = c\vec{e}_1$, dove c è un numero positivo ed $\vec{e}_1 = (1, 0)$.)

[Suggerimento: Ruotare entrambi i vettori nel piano in maniera che $\vec{v}$ vada a finire nel semiasse positivo delle ascisse.]

4. Di una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si sa che $L(\vec{e}_1) = (1, 2)$, $L(\vec{e}_2) = (-1, 1)$, $L(\vec{e}_3) = (0, 2)$. Determinare la matrice A per cui vale $L(\vec{v}) = L_A(\vec{v}) = A\vec{v}$. (In altre parole, determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.)

5. Di una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si sa che $L(\vec{e}_1) = (1, 1)$, $L(\vec{e}_2) = (-2, 1)$. Determinare se L è invertibile. Se sì, scrivere la matrice che rappresenta la trasformazione inversa sulla base canonica.

6. Sono date due trasformazioni lineari $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ed $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Sappiamo che $L(x, y) = (2x - y, -3x + y)$ e che $M(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_2$, $M(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Trovare le matrici rappresentative, rispettivamente, di $L \circ M$ e di $M \circ L$ sulla base canonica.

7. Siano dati i vettori $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_3 = (2, 0, 1)$, e una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $L(\vec{v}_1) = (0, 0, 1, 1)$, $L(\vec{v}_2) = (2, -1, 1, 0)$, $L(\vec{v}_3) = (-1, 4, 0, -2)$. Determinare la matrice A per cui vale $L = L_A$.

[Suggerimento: Se conoscessimo $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ ed $L(\vec{e}_3)$, potremmo procedere come nell'esercizio 4. Ma notiamo che $\vec{e}_1 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$, $\vec{e}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)/2$, $\vec{e}_3 = \vec{v}_3 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Quindi...]

8. Siano dati i vettori $\vec{f}_1 = (4, 1)$, $\vec{f}_2 = (3, 1)$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Scrivere la $[L_A]_{\mathcal{B}}$, ovvero la matrice rappresentativa di L_A sulla base $\mathcal{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

9. Si definisca $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ come $L(x, y, z) = (x + 2y, x + 2z)$. Se $\mathcal{C}_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ è una diversa base di $\mathbb{R}^2$, scrivere $[L]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_3}$, cioè la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi date.

10. Si consideri un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ e un suo punto di accumulazione x_0 . Sia

$$V := \left\{ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right\},$$

ovvero l'insieme delle funzioni definite su D che hanno un limite in x_0 . Ci si convinca che V è uno spazio vettoriale (se si definisce la somma di due funzioni e la moltiplicazione di una funzione con uno scalare nella maniera usuale). Inoltre si definisca la trasformazione $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ nella seguente maniera:

$$L(f) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dimostrare che L è lineare.

11. **[Più elaborato degli altri]** Si dimostri che, all'interno dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, le due funzioni $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \cos x$ sono linearmente indipendenti. Si definisca

$$V := \{f = af_1 + bf_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ovvero: V è l'insieme delle funzioni che sono combinazioni lineari delle funzioni f_1 ed f_2 . Dimostrare che V è uno spazio vettoriale e che $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ ne è una base.

Verificando che l'operatore di derivazione D , che agisce come $D(f) = f'$ (D cioè prende una funzione e ne restituisce la sua derivata), può essere definito come una trasformazione lineare $D : V \longrightarrow V$, determinare $[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, cioè la matrice rappresentativa di D sulla base $\mathcal{B}$.