16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2009/10

Esercizi di ripasso, foglio n. 5

Intorni, limiti e continuità

1. Dire se i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (con n che varia da domanda a domanda) sono aperti, chiusi, o nessuno dei due:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x - 2\}$
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2, |y| \leq 1\}$
   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| < 2, |y - 2| \leq 1\}$
   (d) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$
   (e) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$

2. Dimostrare che l'unione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

3. Dimostrare che l'interserzione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

4. Usare gli esercizi precedenti per dimostrare che sia l'unione che l'intersezione di due insiemi chiusi sono insiemi chiusi.

5. In $\mathbb{R}^2$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q}^2 = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$.

6. In $\mathbb{R}^3$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $U((0, 0, 0), 1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, cioè la sfera aperta di centro l'origine, raggio 1, privata dell'origine.

7. [**Più difficile degli altri**] Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ottenga l'insieme B togliendo da A un numero finito di punti. Dimostrare che A e B hanno gli stessi punti di accumulazione.

8. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni. Nei casi bidimensionali, disegnarlo sul piano (x, y).

   (a) $f(x, y) = e^{xy+y}$
   (b) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + 3z) + \sqrt{y}$
   (c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   (d) $f(x, y) = \dfrac{\arctan(x^2 y + 3x)}{x^4 + 3y^2}$
   (e) $f(x, y) = \ln(x - 2y)$
   (f) $f(x, y) = \dfrac{y}{e^{xy} - 1}$
   (g) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{3}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^4 + \sqrt{x_4}}$

9. Usando la definizione di limite, dimostrare rigorosamente che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} (x^2 + y^2 - 4y) = -4$.

10. Trovare i limiti indicati (che possono essere anche $\pm\infty$):

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\log_{10}(x + y^2)}{\sqrt{x + y}}$
   (b) $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,-1,4)} \frac{3}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^4 + \sqrt{x_4}}$

(c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(d) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{e^{xz+y}}{x^2+4y^2+9z^2}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(f) $\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

(g) $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,\pi)} \tan\left(\frac{2y+z}{4x-3y}\right)$

11. Usando un metodo simile a quello visto a lezione, dimostrare che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$.