

Derivate direzionali, punti critici, ottimizzazione

1. Calcolare la derivata direzionale di f in P , nella direzione di $\vec{v}$:

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{y + 1}$; $P = (1, 0)$; $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $f(x, y) = e^{xy} + 2x$, $P = (1, 0)$; $\vec{v} = (-1, 2)$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $P = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (0, 2, -2)$

2. Calcolare le seguenti derivate direzionali di $f(x, y) = x^2 + xy^4$ nel punto $P = (1, 2)$:

(a) nella direzione del segmento orientato $\vec{PQ}$, dove $Q = (2, 1)$,

(b) nella direzione da P verso l'origine.

3. Trovare il vettore unitario $\vec{u}$ tale che sia massima la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$ nel punto P . Calcolare tale derivata direzionale.

(a) $f(x, y) = \sin(2x - y)$; $P = (0, 0)$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2y - x}$; $P = (1, 2)$

(c) $f(x, y, z) = \frac{2}{(x + y + z)^3}$; $P = (2, 1, -1)$

(d) $f(x, y) = \cos(x^2 + 2y^2)$; $P = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

4. Trovare tutti i punti critici delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - 3y^2 - z^2$

(b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$

(c) $f(x, y) = \sin x(e^y + e^{-y})$

(d) $f(x, y, z) = x^4 - 2x^3 + y^2$ [Non è un errore: f non dipende esplicitamente da z .]

(e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$

5. Trovare e classificare, con il metodo dell'hessiana, tutti i punti critici delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

(b) $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - 3y^2 - z^2$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2$

(d) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

(e) $f(x, y) = \sin x(e^y + e^{-y})$, definita su $D(f) = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

(f) $f(x, y, z) = \arctan(x^2) + e^{y^2 + z^2}$.

6. Disegnare il grafico di $f(x, y) = 1 - x^2$ nello spazio tridimensionale. Individuare tutti i punti critici della f e decidere se sono di massimo (relativo o assoluto), minimo (relativo o assoluto) o sella.
7. Trovare i cinque punti critici di $f(x, y) = \sin x \sin y$, supponendo la f definita sul quadrato aperto $Q = \{(x, y) \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$. Inoltre, ragionando sulla forma particolare di $f(x, y)$, dedurre quali di questi punti sono di massimo o di minimo relativo (relativo o assoluto).
8. Le seguenti funzioni hanno $(0, 0)$ come unico punto critico. Verificare che il metodo dell'hessiana è inconcludente per deciderne la natura. Ciononostante, spiegare perché, in entrambi i casi, si tratta di un punto di sella:
 - (a) $f(x, y) = x^4 + y^3$
 - (b) $f(x, y) = x^3 y^5$
9. In $\mathbb{R}^3$ si chiami σ il piano di equazione $z = x + 2y - 1$ e Q il punto $(2, 3, 1)$. Si calcoli la minima distanza di σ da Q , cioè la minima distanza $\overline{PQ}$ al variare del punto $P = (x, y, x + 2y - 1)$ in σ .
10. **[Un po' più difficile degli altri]** Un negozio di ferramenta vende due tipi di chiodi, il tipo X e il tipo Y. Ricerche di mercato hanno mostrato che se il negozio fissa il prezzo dei chiodi X a x euro/chilo e quello dei chiodi Y a y euro/chilo, venderà (approssimativamente) ogni settimana $16 - 20x + 8y$ chili di chiodi X e $4 + 12x - 7y$ chili di chiodi Y. Si sa che il negozio compra dal fornitore i chiodi X a 2 euro/chilo e i chiodi Y a 4 euro/chilo. Determinare i due prezzi di vendita x e y che massimizzano il profitto del negozio.
11. Si considera una certa pianura molto estesa la quale, con un determinato sistema di riferimento, può essere immaginata come il piano (x, y) . Si è osservato che in questa pianura la velocità del vento nel punto (x, y) è mediamente data da

$$\vec{v}(x, y) = \left(K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \cos(x - y), K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \sin(x - y) \right),$$

ove K è una certa costante positiva il cui valore è influente ai fini dell'esercizio. (Si noti che $\vec{v}(x, y)$ è una velocità vettoriale, quindi $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$). In che punto del piano è più opportuno piazzare una pala eolica?

[Suggerimento: La direzione del vento non è importante: è la sua intensità che conta.]