16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2009/10

Esercizi di ripasso, foglio n. 8

Integrali in due variabili

1. Si esprima il dominio semplice $D \subset \mathbb{R}^2$ prima come dominio x-semplice e poi come dominio y-semplice. *(Per esempio, se D è il disco unitario,*

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le y \le 1;\; -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1;\; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \;) \end{aligned}$$

   (a) $D = [a,b] \times [c,d]$
   (b) $D = \overline{U}((1,1),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$
   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 4\}$
   (d) D è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(2,2)$; $(0,2)$
   (e) D è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(2,2)$; $(0,1)$
   (f) D è la regione del III quadrante compresa fra le curve $y = -x$ e $x = y^2$

2. Calcolare $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dxdy$, dove:

   (a) $f(x,y) = xy(x+y)$; $\quad D = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{y} + x - 3xy^2$; $\quad D = [0,1] \times [1,3]$
   (c) $f(x,y) = \sin(x+y)$; $\quad D = [0,\pi/2]^2 = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$
   (d) $f(x,y) = x\cos(x+y)$; $\quad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(\pi,0)$; (π,π)
   (e) $f(x,y) = e^x$; $\quad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(1,0)$; $(\frac{1}{2},1)$
   (f) $f(x,y) = x^3y$; $\quad D$ è la regione limitata del piano (x,y) compresa fra le curve $y = x^2$ e $y = (1-x)^2$
   (g) $f(x,y) = y^2\cos x$; $\quad D$ è la regione del piano (x,y) compresa fra la curva $y = \sin x$ e il segmento $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dell'asse x
   (h) $f(x,y) = \sqrt{x+2y+1}$; $\quad D$ è la regione limitata del piano (x,y) compresa fra le curve $x = 2y$ e $x = y^2$
   (i) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$; $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2;\; y \le x \le y^2\}$
   (j) $f(x,y) = e^{x+y}$; $\quad D$ è il quadrato di vertici $(1,0)$; $(0,1)$; $(-1,0)$; $(0,-1)$

3. Si consideri l'integrale doppio

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} e^{-x^2} dx\; dy.$$

   Questo corrisponde a $I = \int_D e^{-x^2}\,dxdy$ per una certa regione del piano D. Si disegni D. Inoltre, invertendo l'ordine di integrazione (cioè usando sezioni verticali invece che orizzontali) si calcoli I.

4. Calcolare il volume dei seguenti solidi $\mathcal{S}$:

   (a) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq z \leq 1 + \sin(\pi x)\}$

   (b) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 - x,\ x + y \leq z \leq 10 - x + 2y\}$

   (c) $\mathcal{S}$ è il tronco di parallelepipedo limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $z = -x-2y$

   (d) $\mathcal{S}$ è il solido del I ottante (il I ottante è la regione dello spazio (x, y, z) data da $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) limitato dal piano $x + y + z = 1$.

5. Sia R il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostrare che, se $f(x, y) = g(x)h(y)$ e g e h sono due funzioni continue, allora

$$\int_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b g(x)\, dx \cdot \int_c^d h(y)\, dy.$$