

16954 - MATEMATICA 2, A.A. 2009/10

Esame scritto, 8 giugno 2010

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **tutte le soluzioni ottenute e solo quelle**, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [15 pt] Dimostrare che l'insieme $V = \{(x, x - z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

2. [15 pt] Dimostrare che le funzioni $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = e^x$ sono vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale \mathcal{F} di tutte le funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

[Suggerimento: Come si comporta e^x all'infinito? E $\sin x$ e $\cos x$?]

3. [15 pt] Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare il determinante della matrice $AAB^{-1}CCBA^{-1}C^{-1}A^{-1}B$.

4. [20 pt] Trovare la matrice rappresentativa sulla base canonica della trasformazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinata da $L(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$, $L(1, 1, 0) = (5, 0, 3)$ e $L(1, 1, 1) = (4, 4, 6)$.

Dire se L è invertibile e perché.

5. [25 pt] Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. [15 pt] Determinare e poi disegnare il dominio naturale di $f(x, y) = \frac{\ln y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

7. [20 pt] Si considera una certa pianura molto estesa la quale, con un determinato sistema di riferimento, può essere immaginata come il piano (x, y) . Si è osservato che in questa pianura la velocità del vento nel punto (x, y) è mediamente data da

$$\vec{v}(x, y) = \left(K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \cos(x - y), K e^{-x^2 - 4x - y^2 + 2y} \sin(x - y) \right),$$

ove K è una certa costante positiva il cui valore è ininfluenza ai fini dell'esercizio. (Si noti che $\vec{v}(x, y)$ è una velocità vettoriale, quindi $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). In che punto del piano è più opportuno piazzare una pala eolica?

[Suggerimento: La direzione del vento non è importante: è la sua intensità che conta.]

8. [20 pt] Determinare il volume del solido delimitato dai piani verticali $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ e dai grafici delle funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2$.

9. [15 pt] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$