37529 - PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA 1, A.A. 2012/13

Foglio di esercizi n. 1

Fondamenti teorici

1. Se $\mathscr{B}$ è la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$ e $\mathscr{A}$ la σ-algebra generata dagli intervalli del tipo $]a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dimostrare che $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

2. Dato una spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, dimostrare che la famiglia di sottinsiemi

$$\mathscr{N} := \{A \in \mathscr{A} \mid P(A) \in \{0, 1\}\}$$

   è una σ-algebra. (Questa viene detta la *σ-algebra* banale.)

3. Su $\mathbb{R}^2$, si chiami $\mathscr{A}$ la σ-algebra generata dai rettangoli veri e propri (chiusi), cioè dagli insieme del tipo $[a, b] \times [c, d]$. Dimostrare che $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$, ove quest'ultima è la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}^2$ (cioè, $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} := \mathscr{B}^{\otimes 2}$, dove $\mathscr{B}$ è la la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$).

   [Suggerimento: Dimostrare prima che $\mathscr{A}$ contiene $\mathscr{B}_1 := \{A \times \mathbb{R} \mid A \in \mathscr{B}\}$ e $\mathscr{B}_2 := \{\mathbb{R} \times A \mid A \in \mathscr{B}\}$.]

4. Dimostrare il teorema citato a lezione: Se f è una funzione misurabile da $(\Omega, \mathscr{A})$ a $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, con $f \geq 0$, allora esiste una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ di funzioni semplici, monotona (cioè $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$) tale che

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega).$$

   Inoltre, se f è limitata, tale convergenza è uniforme.

   [Suggerimento: Per $n \geq 1$, partizionare $\mathbb{R}_0^+$ nella famiglia di intervalli $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$, con $k = 0, 1, \ldots n2^n - 1$, insieme alla semiretta $[n, +\infty[$. Se $\omega \in f^{-1}([n, +\infty[)$, definire $f_n(\omega) = n$. Se $\omega \in f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[)$, definire $f_n(\omega) = k2^{-n}$.]

5. Sia $(\Omega, \mathscr{A}, m)$ è uno spazio di misura e $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty[$ una funzione misurabile non-negativa. Dimostrare che $\int_\Omega f \, dm = 0$ implica che $f = 0$ quasi dappertutto, cioè, $m(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}) = 0$.

   [Suggerimento: Per $n \geq 1$, definire $A_n := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 1/n\}$. Cosa si può dire di $\int_{A_n} f \, dm$?]

6. Usando l'esercizio 5, dimostrare che, se in uno spazio di misura $(\Omega, \mathscr{A}, m)$ vale $\int_A f \, dm = 0$, $\forall A \in \mathscr{A}$, allora $f = 0$ quasi dappertutto.