37529 - PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA 1, A.A. 2012/13
Prova scritta, 5 giugno 2013

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________ Voto: [ ]

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI: *Compilare i dati anagrafici su questo foglio, nello spazio soprastante. Le risposte vanno scritte su un foglio di bella copia* ***in forma leggibile e dopo essere state interamente elaborate****. Su ciascuno dei fogli protocollo che si riconsegnano scrivere in alto a destra il proprio cognome e numero di matricola.*

1. Dare la definizione di probabilità condizionale ed enunciare e dimostrare le due formule di Bayes.

2. Dati una funzione cumulativa F continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$, e lo spazio di probabilità $(]0,1[, \mathscr{B}, \lambda)$, dove $\mathscr{B}$ è la σ-algebra di Borel e λ la misura di Lebesgue su $]0,1[$, scrivere la funzione $X(\omega)$, dove ω è un elemento del suddetto spazio, tale che la variabile aleatoria X abbia come cumulativa F. Dimostrare la validità della scelta.

3. Ci sono un sacchetto contente 8 palline (7 bianche e 1 nera) e tre scatole identiche. Arturo pesca una pallina a caso dal sacchetto e la mette nella prima scatola. Poi ne pesca due e le mette nella seconda scatola. Poi mette le rimanenti cinque nella terza scatola. A questo punto chiede a Biagio, che non ha assistito all'operazione precedente, di scegliere una scatola a caso. Che probabilità ha Biagio di trovarci dentro la pallina nera?

4. Si sceglie un intero a caso N uniformemente fra 1 e 10 e poi si sceglie un altro intero K uniformemente fra 1 ed N. Scrivere la densità congiunta $p(n,k)$ di N e K (pensando n e k definiti su $\mathbb{Z}^+$). Se $\pi(k)$ è la densità marginale rispetto alla variabile K, calcolare $\pi(9)$. Cosa rappresenta questo numero?

5. Date X, Y variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, si vede che $Z := \max\{X, Y\}$ è ancora distribuita come la X e la Y. Di che tipo di distribuzione di tratta? Rifare l'esercizio sostituendo 'max' con 'min'.

6. Un cavo telefonico sottomarino ha un tempo di vita dato da una variabile aleatoria T, misurata in anni, definita su $\mathbb{R}^+$ e con densità $f(t) = (t+1)^{-2}$. Per aumentare la durata della linea che si vuole costruire, si dispongono n cavi in parallelo, in maniera tale che la linea funziona quando almeno un cavo funziona. Supponendo che il tempo di vita di ciascun cavo sia distribuito come T e che sia indipendente da quello degli altri cavi, determinare il minimo n affinché si abbia una probabilità di almeno il 99% che la linea continui a funzionare dopo 2 anni.

   Fissato tale n, si chiami Y la variabile che descrive il tempo di vita dell'intera linea. Dare la densità di Y.

7. Due numeri X e Y vengono scelti a caso e indipendentemente con distribuzione uniforme su $[0,1]$. Indichiamo con Z la distanza fra X ed Y. Qual è la densità di Z? Qual è la distanza media fra X ed Y?

8. Un ricercatore genera al computer n numeri $\omega_1, \ldots, \omega_n$, indipendenti e distribuiti uniformemente su $[0,1]$, e poi calcola il numero (aleatorio)

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i),$$

dove f è una funzione $[0,1] \longrightarrow [0,2]$ molto complicata. Che numero y sta cercando di stimare quel ricercatore tramite il metodo Montecarlo?

Supponiamo che si voglia avere una probabilità di almeno il 99.8% che $|Y_n - y| \leq 10^{-3}$. Quanto grande si deve scegliere n?

[La risposta all'ultima domanda può solo essere stimata e la stima dipende dalla stima di una certa quantità, che sta allo studente dare in maniera sensata.]