

**37529 - PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA 1, A.A. 2012/13**  
**Prova scritta, 2 luglio 2013**

Cognome: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Voto:

**ISTRUZIONI:** *Compilare i dati anagrafici su questo foglio, nello spazio soprastante. Le risposte vanno scritte su un foglio di bella copia **in forma leggibile e dopo essere state interamente elaborate**. Su ciascuno dei fogli protocollo che si riconsegnano scrivere in alto a destra il proprio cognome e numero di matricola.*

1. Dare la definizione di spazio di probabilità  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  con densità.
2. Cosa significa che la successione di variabili aleatorie  $\{X_n\}$  converge in probabilità alla variabile aleatoria  $X$ ? E cosa significa che vi converge in legge? È importante che le variabili aleatorie siano definite sullo stesso spazio di probabilità?
3. Dare l'enunciato del Teorema Limite Centrale.
4. Sulla ruota del lotto di Bologna vengono estratti 5 numeri (interi) fra 1 e 90. Qual è la probabilità che la tripla  $\{1, 2, 3\}$  faccia un ambo (cioè contenga 2 dei numeri estratti)? È una terna?  
*[Attenzione: se esce la terna non si contano gli ambi in essa contenuti!]*
5. Una certa malattia può presentare i sintomi A e B, oppure non presentare alcun sintomo. I sintomi A e B sono mutuamente esclusivi, nel senso che un paziente che presenta l'uno non presenta l'altro. Sulla base dei dati provenienti dagli ospedali italiani, l'osservatorio statistico del Sistema Sanitario Nazionale stima che:
  - (a) il 12% di coloro che presentano il sintomo A è affetto dalla malattia;
  - (b) il 21% di coloro che presentano il sintomo B è affetto dalla malattia;
  - (c) gli individui con il sintomo A sono circa lo 0.8% della popolazione;
  - (d) gli individui con il sintomo B sono circa il 2% della popolazione;
  - (e) la malattia ha un'incidenza dello 0.55% (cioè lo 0.55% della popolazione ne è affetto).Qual è la probabilità che un individuo senza i sintomi A e B sia affetto dalla malattia?
6. Siano  $p_n(k)$  e  $p(k)$  le densità (discrete) delle variabili aleatorie, rispettivamente,  $K_n$  e  $K$ , a valori in  $\mathbb{N}$ . Se,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $p_n(k) \rightarrow p(k)$ , per  $n \rightarrow \infty$ , dimostrare che  $K_n$  converge in legge a  $K$ .
7. Una variabile aleatoria  $X$  su  $\mathbb{R}_0^+$  ha densità  $f_X(x) := 1/(x+1)^2$ . Trovare una funzione  $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tale che la variabile aleatoria  $Y := \varphi(X)$  sia esponenziale di parametro  $\lambda$ .
8. Se  $X$  e  $Y$  sono due variabili uniformi in  $]0, 1]$  e indipendenti, determinare la densità di  $Z := XY$ . Calcolare inoltre  $E(Z)$  e  $V(Z)$ .