37529 - PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA 1, A.A. 2012/13

Esempio di prova scritta n. 2

1. Dimostrare la formula $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

2. Dare la definizione di probabilità indotta P_X per una variabile aleatoria X a valori in $\mathbb{R}$, definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

3. Si è visto statisticamente che, in un certo corso di laurea che ha 4 esami al primo semestre, la probabilità che uno studente abbandoni il corso nel secondo semestre è 0 se ha superato tutti e 4 gli esami del primo semestre, 0.02 se ha superato 3 esami, 0.22 se ha superato 2 esami, 0.45, se ha superato 1 esame, e 0.70 se non ha superato alcun esame. Si supponga che il numero di esami superati al primo semestre sia una variabile binomiale con probabilità di successo $p = 0.90$. Preso uno studente che ha abbandonato il corso nel secondo semestre, qual è la probabilità che non abbia superato alcun esame?

4. Se X è una variabile gaussiana di media μ e varianza σ^2, scrivere una formula per il momento k-esimo $E(X^k)$.

   [Suggerimento: Iniziare calcolando il momento k-esimo centrato.]

5. Siano date le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, tutte uniformi su $[0,1]$ ed indipendenti. Scrivere la densità di $Y := X_1 + X_2 + X_3$.

6. Scrivere l'enunciato di un teorema il cui significato è che, nel calcolo del valore d'aspettazione di una variabile aleatoria X, non è importante su quale spazio di probabilità sia definita la X. Dimostrare tale teorema nel caso in cui lo spazio di probabilità sia discreto.

7. La gittata di un proiettile ad alzo θ è la distanza orizzontale percorsa da un proiettile lanciato da terra nella direzione che forma un angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ con l'asse orizzontale. La sua formula è $G(\theta) = v_0^2 \sin(2\theta)/g$, dove v_0 è il modulo della velocità iniziale e $g = 9.81$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità. Supponendo che l'alzo θ di un cannone venga scelto in maniera aleatoria, uniformemente fra 0 e $\pi/2$, e che $v_0 = 12.2$ m/s, determinare la densità della variabile aleatoria G.

8. Si sa che, in molte nazioni, il reddito annuo di una persona scelta a caso fra quelle che hanno un lavoro è ben approssimato da una variabile aleatoria R su $[r_{\min}, +\infty[$, con densità $f(r) = \alpha r_{\min}^{\alpha}/r^{\alpha+1}$ *[Questa si chiama distribuzione di Pareto e $r_{\min}$ rappresenta il reddito minimo.]* In una determinata nazione vale $r_{\min} = 10000$ euro e $\alpha = 3$. Si prenda una cittadina di 10000 abitanti occupati, i cui redditi si suppongono indipendenti. Qual è il valore d'aspettazione del reddito totale della cittadina? Qual è approssimativamente la probabilità che tale reddito si discosti di più di 1.75 milioni di euro dal suo valore d'aspettazione?