

**CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE**  
(modulo del corso 66599 - MATEMATICA E INFORMATICA)

**A.A. 2013/14**

**Foglio di esercizi n. 1**

1. L'età di una persona, in anni, alla mezzanotte del 31 dicembre 2006, è una funzione dall'insieme delle persone viventi all'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ ?

2. La relazione che associa ad ogni persona il suo numero di cellulare è una funzione  $P \rightarrow C$ , dove  $P$  è l'insieme della persone e  $C$  è l'insieme dei numeri naturali di 10 cifre?

La relazione che associa ad ogni numero naturale  $n$  di 10 cifre la persona che possiede il cellulare col numero  $n$  è una funzione  $C \rightarrow P$ ?

*[Attenzione alla seconda domanda!]*

3. Determinare quali di queste relazioni sono funzioni.

(a) la relazione, fra l'insieme dei comuni italiani e l'insieme delle persone residenti in Italia, che lega un comune a ciascuno dei suoi residenti;

(b) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme dei comuni italiani, che lega ciascuna persona al proprio comune di residenza;

(c) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme degli edifici presenti sul suolo italiano, che lega ciascuna persona alla propria casa di proprietà;

(d) la relazione, fra l'insieme dei cittadini italiani e l'insieme dei passaporti italiani validi, che lega ciascun cittadino al proprio passaporto;

(e) la relazione, fra l'insieme dei passaporti italiani validi e l'insieme dei cittadini italiani, che lega ciascun passaporto al proprio possessore.

4. Trovare il dominio naturale di:

(a)  $f(x) = \sqrt{3 - x - 2x^2}$

(b)  $f(x) = e^{\tan x}$

(c)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|\sin x|}}$

(e)  $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\log_3 x}$

(f)  $f(x) = \frac{\ln(x^2 - \frac{1}{4})}{\log_3 x}$

5. La funzione  $\tan$  (cioè  $x \mapsto \tan x$ ) è crescente sul suo dominio naturale? Perché?

6. Vero o falso: se, per ogni retta orizzontale nel piano cartesiano, questa interseca il grafico di  $f$  in al più un punto, la funzione  $f$  è iniettiva.

7. Dimostrare che, se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente decrescente, allora  $f$  è iniettiva.

8. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Nel caso siano biettive, dare una formula per la funzione inversa  $x = f^{-1}(y)$  (o, con notazione più elegante,  $y = f^{-1}(x)$ ).

(a)  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $f(x) = \sqrt{x-1}$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $f(x) = |x-2|$

(c)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$

(d)  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = 2^{x^4}$

(e)  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

9. Dimostrare che la funzione  $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ , definita sul dominio naturale (che è...?) è iniettiva. Poi, assumendo che l'insieme di arrivo sia esattamente il codominio, determinare una formula per  $f^{-1}$ .

*[Suggerimento: Pensare alla  $f$  come una composizione di due funzioni, che sono...]*