28360 - FISICA MATEMATICA 1
A.A. 2011/12
Prova di autoverifica

9 novembre 2011

T1) Dare la definizione di punto materiale.

Risoluzione. Un punto materiale è un punto matematico (privo di dimensioni) dotato di massa e in grado soltanto di traslare nello spazio. Si tratta di un modello ideale, comodo per descrivere situazioni in cui il corpo in esame ha dimensioni trascurabili rispetto all'ambiente in cui si trova ad operare. Per esempio, per descrivere il moto di una nave in pieno oceano non è necessario tenere conto delle dimensioni effettive della nave, ma basta considerare le coordinate di un punto qualunque di essa: l'errore che si commette è trascurabile; se invece la nave sta entrando in porto, allora le dimensioni di essa sono confrontabili con gli spazi a disposizione, e bisogna tenerne conto per poter effettuare le manovre corrette: la schematizzazione di punto materiale non è più utile in quest'ultimo caso. □

T2) Dimostrare che se un corpo si muove lungo una retta con velocità media $v_M(t_1, t_2)$ costante (cioè indipendente dall'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$), allora quel corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Risoluzione. Abbiamo:

$$v_M(t_1, t_2) \coloneqq \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Poiché $v_M(t_1, t_2)$ non dipende dall'intervallo considerato, indichiamo il suo valore costante con v_0, ottenendo:

$$v_0 = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

da cui, risolvendo rispetto a $x(t_2)$:

$$x(t_2) = x(t_1) + v_0 \cdot (t_2 - t_1)$$

Fissiamo l'istante t_1, azzerando il nostro cronometro proprio in quel momento (poniamo, cioè, $t_1 = 0$) e lasciamo variare l'istante $t_2 = t$. Così facendo, l'ultima formula scritta diviene:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

avendo posto $x(0) = x_0$. La legge oraria scritta è proprio quella che rappresenta un moto rettilineo uniforme lungo un asse, che abbiamo convenuto di indicare come l'asse x. □

T3) Data la legge oraria nel piano $\vec{r}(t) = (\sqrt{at^2 + b}, c\cos(dt^3))$, determinare le unità di misura di a, b, c, d, sapendo che $\vec{r}$ e t sono espressi in unità standard del Sistema Internazionale.

Risoluzione. Le componenti del vettore posizione devono essere espresse in m.

Ciò detto, si ha che nell'espressione $\sqrt{at^2 + b}$, il radicando deve essere espresso in m^2, per cui anche i termini della somma che lo definiscono devono essere espressi nella medesima unità di misura; ciò porta subito a concludere che b deve essere espresso in m^2 e a in $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$.

Per quanto riguarda l'espressione $c\cos(dt^3)$, invece, si vede subito che c è espresso in m, mentre l'argomento del coseno dt^3 dovendo essere misurato in rad, deve aversi che d si misura in $\mathrm{rad}\,\mathrm{s}^{-3}$.

□

E1) Un'auto viaggia a $105\,\mathrm{km/h}$ quando il conducente si accorge di un pericolo. Dopo un tempo di reazione di $1.20\,\mathrm{s}$, questi frena dando all'auto una decelerazione costante di $7.45\,\mathrm{m/s^2}$. Determinare la distanza percorsa dall'avvistamento del pericolo all'arresto dell'auto.

Risoluzione. Poniamo $t = 0$ l'istante in cui il conducente si accorge del pericolo e supponiamo che in tale istante l'auto si trovi nel punto $x = 0$. Il moto si compone di due fasi: durante il tempo di reazione l'auto continua a muoversi di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0 = 105\,\mathrm{km/h} = 29.2\,\mathrm{m/s}$; durante la frenata l'auto si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione negativa $a = -7.45\,\mathrm{m/s^2}$. La legge oraria del moto complessivo è dunque data dalla seguente relazione:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t, & per\ t \in [0, t_*] \\ x(t) = x(t_*) + v_0(t - t_*) + \dfrac{1}{2}a(t - t_*)^2, & per\ t \in [t_*, t_a] \end{cases}$$

dove $t_* = 1.20\,\mathrm{s}$ e t_a è l'istante a cui l'auto si arresta. Per determinare la distanza percorsa dall'avvistamento del pericolo all'arresto dell'auto bisogna determinare l'istante t_a. Derivando la legge oraria, per $t \in [t_*, t_a]$, si ottiene:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_*)$$

Ora, imponendo $v(t_a) = 0$ si ricava il valore cercato:

$$0 = v_0 + a(t_a - t_*) \implies t_a = -\frac{v_0}{a} + t_* = 5.12\,\mathrm{s}$$

Sostituendo nella legge oraria abbiamo:

$$\begin{aligned} x(5.12\,\mathrm{s}) &= (29.2\,\mathrm{m/s}) \cdot (1.20\,\mathrm{s}) + (29.2\,\mathrm{m/s}) \cdot (3.92\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(-7.45\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (3.92\,\mathrm{s})^2 \\ &= 92.3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Che ci fornisce la distanza cercata. □

E2) Un punto materiale si muove lungo una retta con un'accelerazione pari a $a(t) = -bt^{-3}$, dove $b = 40\,\mathrm{m \cdot s}$. Si sa che $v(1) = 20\,\mathrm{m/s}$ e che $x(1) = 10\,\mathrm{m}$. Il punto materiale raggiungerà (a tempi positivi) il punto $x = 35\,\mathrm{m}$? Se sì, a quale tempo?

Risoluzione. Per comodità di notazione indichiamo l'istante $1\,\mathrm{s}$ con t_1. Determiniamo la legge oraria a partire dall'accelerazione:

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau)d\tau = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Big(-b\tau^{-3}\Big)d\tau = v(t_1) + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)d\tau = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left[v(t_1) + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)\right]d\tau \\ &= x(t_1) + v(t_1)(t - t_1) + \frac{b}{2}\left(-\frac{1}{t} - \frac{t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}\right) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo la seguente espressione:

$$x(t) = 30\,\mathrm{m} - \frac{20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}{t}$$

da cui risulta chiaro che, per $t > 0$ si ha $x(t) < 30\,\mathrm{m}$, per cui il punto non raggiungerà mai, a tempi positivi, la posizione $x = 35\,\mathrm{m}$. □

E3) Determinare se un punto materiale che si muove nello spazio con legge oraria:

$$\vec{r}(t) = \left(2t^2 - 3t + 1, t^2 - t, \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

ha visitato o visiterà il punto $(3, 2, 0)$. Se sì, a quali tempi?

Risoluzione. Tralasciando l'indicazione delle unità di misura, vediamo a quali istanti la prima componente passa per l'ascissa $x = 3$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 3 \iff 2t^2 - 3t - 2 = 0 \iff t \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

Sostituendo questi due valori nella legge oraria, otteniamo che il punto materiale, a tali istanti, passa per i punti:

$$(3, 3/4, \sqrt{2}/2)\ \ e\ \ (3, 2, 0)$$

Quindi il punto materiale passa per la posizione $(3, 2, 0)$ all'istante $t = 2$. Questo è l'unico istante in cui ciò accade, in quanto in qualunque altro istante (a parte l'istante $-1/2$ che è già stato scartato), la prima componente della legge oraria non passa per $x = 3$. □