28360 - FISICA MATEMATICA 1
A.A. 2014/15
Prova di autoverifica

5 novembre 2014

T1) Usando le unità di misura del Sistema Internazionale, descrivere un esperimento che consenta di determinare la velocità della luce nel vuoto con la maggior precisione possibile.

Risoluzione. Dal 1983, la Conferénce Générale des Poids et Mesures ha stabilito che il metro è la lunghezza del cammino percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di $1/299\,792\,458\,\mathrm{s}$. Con questa definizione la velocità della luce assume, per definizione, il valore *esatto*:

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$$

Per cui, ad oggi, la velocità della luce non viene determinata sperimentalmente, ma si assume sia conosciuta senza errori. In passato la velocità della luce è stata misurata sperimentalmente in diversi modi. Già Galilei aveva provato (senza successo) a mandare segnali di luce, mediante lanterne, tra due colli fuori Firenze, per determinarne la velocità. Importanti, da un punto di vista storico sono la misurazione di Rømer, che sfruttò le eclissi di Io, una luna di Giove, e l'esperienza della ruota dentata di Fizeau. □

T2) Il sistema Tutor, che si trova installato su alcuni tratti della rete autostradale italiana, è in grado di misurare i tempi t_1 e t_2 in cui un'auto attraversa, rispettivamente, una postazione del sistema e la successiva. Il sistema conosce anche la distanza L tra le due postazioni e quindi può calcolarsi la velocità media $v_M(t_1, t_2)$ dell'auto. Come? Dimostrare inoltre che, se $v_M(t_1, t_2) > 130\,\mathrm{km/h}$, allora l'auto ha necessariamente avuto una velocità istantanea maggiore di $130\,\mathrm{km/h}$ in qualche tempo nell'intervallo $[t_1, t_2]$.

Risoluzione. Il moto di un'automobile che viaggia lungo una strada può essere assimilato al moto unidimensionale (non necessariamente rettilineo) di un punto mobile. Se t_1 e t_2 sono due istanti di tempo (poniamo $t_2 > t_1$), e $s(t_1)$, $s(t_2)$ le posizioni del punto ai rispettivi istanti, allora la velocità media relativa al percorso in questione è data dalla seguente relazione:

$$v_M(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Nel caso in esame, si ha:

$$s(t_2) - s(t_1) = L$$

per cui, la formula per la velocità media diventa:

$$v_M(t_1, t_2) = \frac{L}{t_2 - t_1}$$

Misurando gli istanti di tempo t_1 e t_2, e conosciuta la distanza fissa L, mediante una semplice divisione è possibile stabilire la velocità media dell'auto.

Qualora la velocità media dovesse superare il valore limite consentito in autostrada, come si può essere sicuri che l'automobile abbia effettivamente superato tale limite in almeno un istante nell'intervallo $[t_1, t_2]$? In tal caso, le leggi della matematica vengono in soccorso alle leggi umane: supponendo che la legge oraria del moto sia descritta da una funzione $s(t)$ continua e derivabile (ogni traiettoria "ragionevole" deve essere descritta da una funzione derivabile almeno due volte, con derivata seconda continua), possiamo applicare ad essa il Teorema di Lagrange del valor medio (si veda la Figura 1), in base al quale esiste almeno un istante, che chiamiamo t_*, in cui la derivata $s'(t_*)$ è uguale al valore del coefficiente angolare della retta passante per i punti di coordinate $\big(t_1, s(t_1)\big)$, $\big(t_2, s(t_2)\big)$:

$$s'(t_*) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ma la derivata $s'(t_*)$ è per definizione la velocità istantanea al tempo t_*, mentre il secondo membro dell'ultima equazione è proprio la velocità media $v_M(t_1, t_2)$, per cui si ha:

$$v(t_*) = v_M(t_1, t_2)$$

E così, se la velocità media supera i 130 km/h, allora anche la velocità all'istante t_* è maggiore di tale limite.

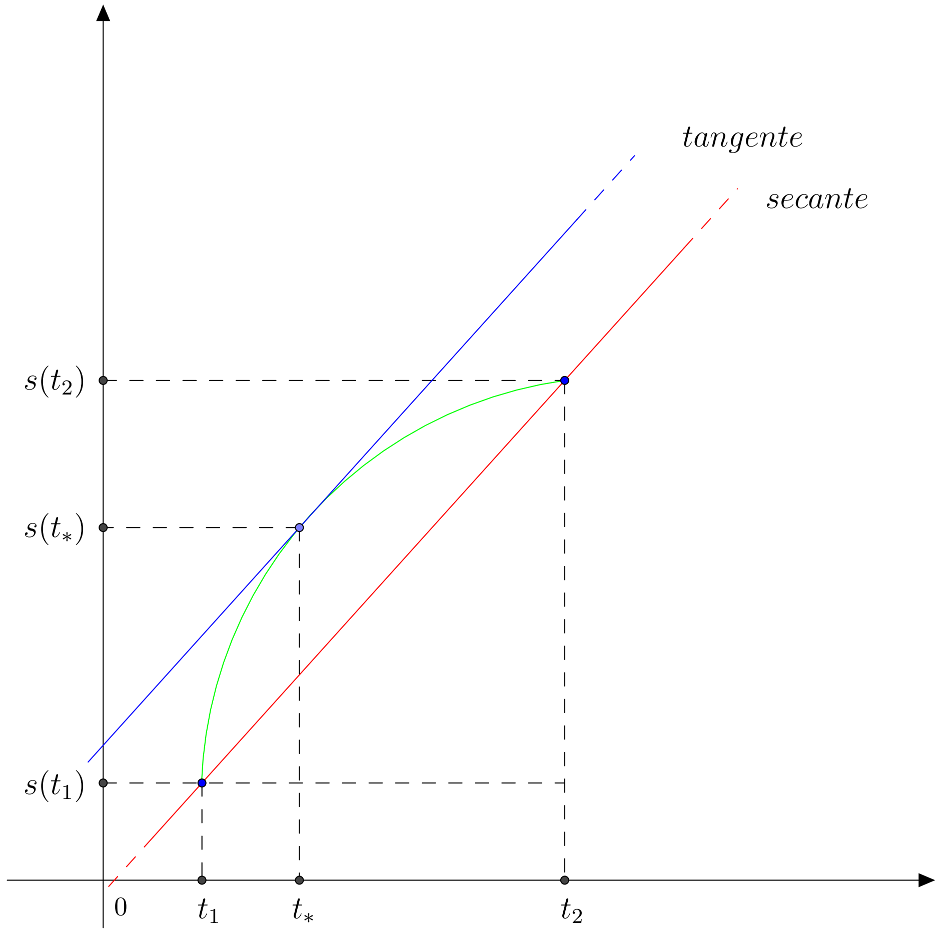

Figura 1: Teorema di Lagrange del valor medio: esiste almeno un punto nell'intervallo $[t_1, t_2]$ in cui la retta tangente è parallela alla retta secante.

Si può anche ragionare nel seguente modo: mantenendo l'ipotesi che la velocità media superi il valore di 130 km/h, supponiamo, per assurdo, che la velocità istantanea sia sempre inferiore alla velocità limite: $v(t) \leq 130\,\mathrm{km/h} = k$ (indichiamo il limite di velocità con una costante k) $\forall t \in [t_1, t_2]$, allora, per la proprietà di monotonia degli integrali (che verrà dimostrata in maniera rigorosa nel corso di Analisi Matematica), si ha:

$$v(t) \leq k, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \implies \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \leq \int_{t_1}^{t_2} kdt$$

ovvero

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \leq k \int_{t_1}^{t_2} dt = k(t_2 - t_1)$$

in quanto k è una costante. Ricordando come si passa dalla velocità istantanea alla legge oraria, il primo membro dell'ultima relazione si scrive:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

per cui si avrebbe, in definitiva:

$$s(t_2) - s(t_1) \leq k(t_2 - t_1)$$

Dividendo ambo i membri per la quantità (positiva) $t_2 - t_1$, si otterrebbe:

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \leq k$$

ovvero

$$v_M(t_1, t_2) \leq k$$

il che è assurdo poiché abbiamo supposto che la velocità media superi il valore $k = 130\,\mathrm{km/h}$. L'assurdo deriva dall'aver posto inizialmente che fosse $v(t) \leq 130\,\mathrm{km/h}$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, per cui, negando questa affermazione otteniamo:

$$\exists t \in [t_1, t_2] \,|\, v(t) > 130\,\mathrm{km/h}$$

$\square$

T3) Il piede di un calciatore si trova nell'origine di un piano coordinato, con l'asse y rivolto verso l'alto, mentre colpisce una palla con velocità di modulo v_1 rivolta verso l'alto. Dopo questo piccolo palleggio, la palla ricade di nuovo nell'origine e viene stavolta colpita con velocità di modulo v_2 rivolta verso la bisettrice del primo quadrante. Si assume che $v_2 \gg v_1$ (cioè v_2 è molto più grande di v_1). Disegnare schematicamente la legge oraria di questo moto dal primo calcio fino a che la palla torna a terra dopo il lungo lancio.

Per un bonus punteggio, scrivere nel grafico le coordiante di tutti i punti corrispondenti alla palla che si trova a livello del suolo (o del piede mentre calcia, che qui approssimiamo a livello del suolo).

Risoluzione. Assumiamo che la palla venga colpita la prima volta all'istante $t = 0$ e la seconda volta all'istante $t_1 > 0$. Al primo colpo viene impartita una velocità $\vec{v}_1 = (0, v_1)$, con $v_1 = \|\vec{v}_1\|$, mentre al secondo colpo viene impartita una velocità $\vec{v}_2 = (v_2 \cos \frac{\pi}{4}, v_2 \sin \frac{\pi}{4}) = (v_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, v_2 \frac{\sqrt{2}}{2})$, con $v_2 = \|\vec{v}_2\|$.

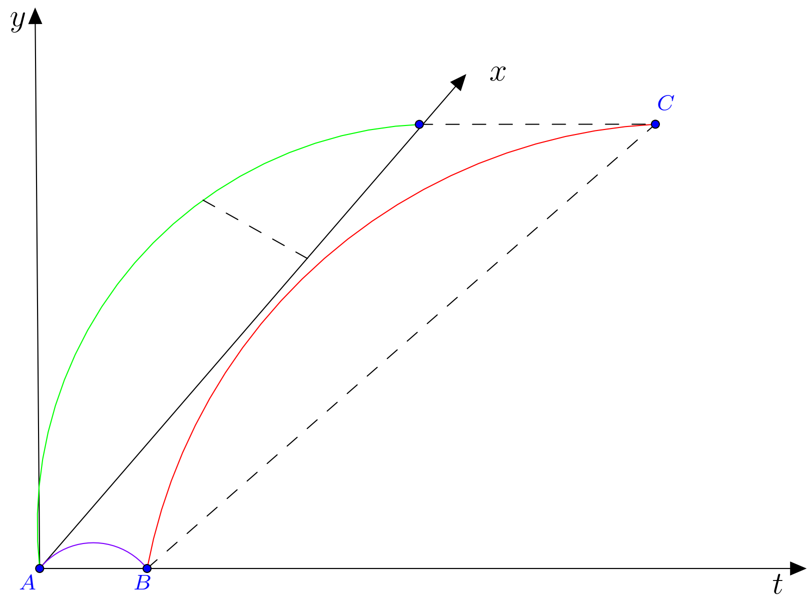

Figura 2: Esercizio T2): traiettoria della palla nel piano x-y e legge oraria nella terna t-x-y.

La palla si muove sotto l'azione della sola forza peso (che in prossimità della superficie terrestre consideriamo costante). La legge oraria del moto è data dunque dalla seguente relazione:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \left(0, v_1 t - \frac{1}{2}gt^2\right), & t \in [0, t_1] \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_2(t-t_1), \frac{\sqrt{2}}{2}v_2(t-t_1) - \frac{1}{2}g(t-t_1)^2\right), & t \geq t_1 \end{cases} \tag{1}$$

Il moto è schematizzabile nel modo descritto in Figura 2. La traiettoria (luogo dei punti dello spazio occupati dalla palla) è divisa in due parti: la prima fase del moto è descritta da un piccolo segmento giacente lungo l'asse y e con il primo estremo nell'origine (che in figura è difficilmente visualizzabile a causa della condizione $v_1 \ll v_2$); la seconda fase del moto è rappresentata dalla parabola in verde. Per quanto riguarda la legge oraria, invece, entrambe le fasi sono descritte da due parabole: la prima giace nel piano t-y, in quanto dopo il primo palleggio la palla si muove solo lungo l'asse y, mentre la seconda si "immerge" anche nel piano t-x.

La palla si trova al livello del suolo nei punti $A \equiv (0,0,0)$, $B \equiv (t_1, 0, 0)$ e

$C \equiv (t_2, x(t_2), 0)$. t_1 è l'istante in cui, dopo il primo palleggio, la palla tocca terra: per determinarlo basta quindi risolvere l'equazione:

$$v_1 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

da cui otteniamo le soluzioni $t_1 = 0$ e $t_1 = \frac{2v_1}{g}$, di cui la seconda è quella che a noi interessa essendo $t_1 > 0$, mentre la prima si riferisce all'istante in cui la palla si trovava nel punto A. Abbiamo quindi $B \equiv \left(\frac{2v_1}{g}, 0, 0\right)$. All'istante $t_2 > t_1$, la palla tocca di nuovo terra, per cui, da (1) abbiamo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_2 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g (t_2 - t_1)^2 = 0$$

Risolvendo rispetto a $t_2 - t_1$ otteniamo le due soluzioni:

$$t_2 - t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 - t_1 = \frac{v_2\sqrt{2}}{g}$$

La soluzione $t_2 - t_1 = 0$ è da scartare, in quanto $t_2 > t_1$, mentre la soluzione $t_2 - t_1 = \frac{v_2\sqrt{2}}{g}$ fornisce:

$$t_2 = t_1 + \frac{v_2\sqrt{2}}{g} = \frac{2v_1}{g} + \frac{v_2\sqrt{2}}{g}$$

Adesso siamo in grado di calcolare $x(t_2)$

$$x(t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \frac{v_2\sqrt{2}}{g} = \frac{v_2^2}{g}$$

Quindi il punto C ha coordinate $\left(\frac{2v_1}{g} + \frac{v_2\sqrt{2}}{g}, \frac{v_2^2}{g}, 0\right)$. □

E1) Il signor Asdrubale tiene in mano il tubo dell'acqua, con il beccuccio in prossimità della sua testa e rivolto verso l'alto. Per fargli uno scherzo, Pierino apre l'acqua. Questa, dopo qualche istante, comincia a zampillare dal tubo con velocità $v_0 = 2.85\,\mathrm{m/s}$. Quanto tempo ha il signor Asdrubale per scansarsi ed evitare di bagnarsi?

Risoluzione. L'acqua comincia a muoversi verticalmente verso l'alto finché, raggiunta la quota massima, si ferma e inverte il senso di marcia, puntando diritta sulla testa del signor Asdrubale. Conveniamo di chiamare z l'asse verticale; all'istante iniziale $t = 0$ l'acqua si trova nel punto $z(0) = z_0$. La legge oraria è data dalla seguente relazione:

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

All'istante finale t_f, l'acqua sarà ritornata alla quota z_0, ovvero si avrà:

$$z_0 = z_0 + v_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2$$

da cui è semplice ricavare la soluzione che a noi interessa:

$$t_f = \frac{2v_0}{g}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$t_f = \frac{2 \cdot 2.85\,\mathrm{m/s}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}} = 0.581\,\mathrm{s}$$

Questo è il tempo di cui il signor Asdrubale dispone per vanificare i piani di Pierino! □

E2) In un piano coordinato (x, y), dove l'asse x rappresenta il livello del suolo e l'asse y è verticale e orientato verso l'alto, un aereo viaggia a quota $y_A = 2450\,\mathrm{m}$, con legge oraria (nelle x) data da $x_A(t) = x_{0A} + v_A t$, ove $x_{0A} = -5120\,\mathrm{m}$ e $v_A = 225\,\mathrm{m/s}$. Nell'origine del piano è posto un razzo, i cui motori vengono accesi al tempo $t_1 > 0$, imprimendo al razzo un'accelerazione verticale pari a $a_R(t) = \alpha(t - t_1)$, per $t \geq t_1$, con $\alpha = 20.2\,\mathrm{m/s^3}$. La traiettoria del razzo coincide quindi col semiasse positivo delle y, fino al momento in cui il razzo colpisce l'aereo. Sapendo questo, determinare t_1.

[*Un suggerimento per semplificare i calcoli (ma non necessario per risolvere l'esercizio) è quello di misurare il tempo con un altro cronometro: il cronometro che parte al tempo t_1. Chiamando τ il tempo misurato secondo questo cronometro, trovare la formula che lega τ a t e fare i conti usando τ.*]

Risoluzione. Il problema è schematicamente illustrato in Figura 3. Detto t_* l'istante in cui il razzo colpirà l'aereo, le leggi orarie di quest'ultimo e del razzo sono date, rispettivamente, da:

$$\vec{r}_A(t) = (x_{0A} + v_A t, y_A)$$

e

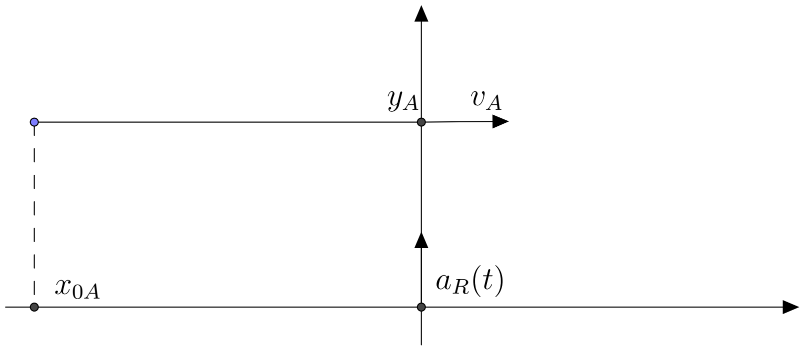

Figura 3: Esercizio E2)

$$\vec{r}_R(t) = \begin{cases} (0,0) & per\ t \in [0, t_1] \\ (0, y_R(t)) & per\ t \in [t_1, t_*] \end{cases}$$

Si tratta, quindi, di determinare la legge oraria $y_R(t)$ a partire dall'espressione nota dell'accelerazione verticale del razzo. Essendo l'accelerazione istantanea definita come la derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

la legge oraria del razzo relativa all'intervallo $[t_1, t_*]$ si ricava mediante due integrazioni successive. La prima di esse ci fornisce l'espressione della velocità in funzione del tempo:

$$v_R(t) = v_R(t_1) + \int_{t_1}^{t} \alpha(s - t_1)ds$$

dove s è la variabile muta d'integrazione. Si assume che la velocità iniziale del razzo sia nulla, $v_R(t_1) = 0$; l'integrale può essere risolto in maniera elementare sfruttando la proprietà di linearità degli integrali:

$$\begin{aligned} v_R(t) =& \int_{t_1}^{t} \alpha(s - t_1)ds = \alpha \int_{t_1}^{t} sds - \alpha t_1 \int_{t_1}^{t} ds = \alpha \left[\frac{s^2}{2}\right]_{t_1}^{t} - \alpha t_1 \left[s\right]_{t_1}^{t} \\ =& \frac{\alpha}{2}(t^2 - t_1^2) - \alpha t_1(t - t_1) = \frac{\alpha}{2}(t - t_1)(t + t_1) - \alpha t_1(t - t_1) \\ =& \frac{\alpha}{2}(t - t_1)\Big[(t + t_1) - 2t_1\Big] = \frac{\alpha}{2}(t - t_1)^2 \end{aligned}$$

Integrando l'espressione appena ottenuta, ricaviamo la legge oraria cercata:

$$
\begin{aligned}
y_R(t) = &\int_{t_1}^{t} \frac{\alpha}{2}(s-t_1)^2 ds = \frac{\alpha}{2}\int_{t_1}^{t} s^2 ds - \alpha t_1 \int_{t_1}^{t} s ds + \frac{\alpha}{2}t_1^2 \int_{t_1}^{t} ds \\
= &\frac{\alpha}{2}\left[\frac{s^3}{3}\right]_{t_1}^{t} - \alpha t_1 \left[\frac{s^2}{2}\right]_{t_1}^{t} + \frac{\alpha}{2}t_1^2 \Big[s\Big]_{t_1}^{t} = \frac{\alpha}{6}(t^3 - t_1^3) - \frac{\alpha t_1}{2}(t^2 - t_1^2) + \frac{\alpha}{2}t_1^2(t-t_1) \\
= &\frac{\alpha}{6}(t-t_1)(t^2 + t_1 t + t_1^2) + \frac{\alpha t_1}{2}(t-t_1)(t+t_1) + \frac{\alpha}{2}t_1^2(t-t_1) \\
= &\frac{\alpha}{6}(t-t_1)\Big[(t^2 + t_1 t + t_1^2) - 3t_1(t+t_1) + 3t_1^2\Big] \\
= &\frac{\alpha}{6}(t-t_1)\Big[t^2 + t_1 t + t_1^2 - 3t_1 t - 3t_1^2 + 3t_1^2\Big] = \frac{\alpha}{6}(t-t_1)(t^2 - 2t_1 t + t_1^2) \\
= &\frac{\alpha}{6}(t-t_1)^3
\end{aligned}
$$

All'istante t_* deve aversi $\vec{r}_A(t_*) = \vec{r}_R(t_*)$, che equivale al seguente sistema:

$$
\begin{cases}
x_{0A} + v_A t_* = 0 \\
y_A = \dfrac{\alpha}{6}(t_* - t_1)^3
\end{cases}
\tag{2}
$$

che si risolve nel seguente modo

$$
\begin{cases}
t_* = -\dfrac{x_{0A}}{v_A} \\
(t_* - t_1) = \sqrt[3]{\dfrac{6y_A}{\alpha}}
\end{cases}
$$

da cui si ricava

$$
t_1 = -\frac{x_{0A}}{v_A} - \sqrt[3]{\frac{6y_A}{\alpha}}
$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$
t_1 = -\frac{-5120\,\mathrm{m}}{225\,\mathrm{m/s}} - \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2450\,\mathrm{m}}{20.2\,\mathrm{m/s^3}}} = 13.8\,\mathrm{s}
$$

Gli integrali svolti per ottenere la legge oraria del razzo potevano essere calcolati in maniera più agevole facendo partire il cronometro all'istante t_1: in altre parole, quando il vecchio cronometro segna il tempo $t = t_1$, il nuovo segnerà il tempo $\tau = 0$. È facile così convincersi che la relazione che lega i tempi misurati dai due cronometri è la seguente:

$$
\tau = t - t_1 \tag{3}
$$

Gli integrali in questione diventano[1]:

$$v_R(\tau) = \int_0^\tau \alpha s ds = \frac{\alpha}{2}\tau^2$$

$$y_R(\tau) = \int_0^\tau \frac{\alpha}{2} s^2 ds = \frac{\alpha}{6}\tau^3$$

Utilizzando la (3) nel sistema (2), abbiamo:

$$\begin{cases} x_{0A} + v_A t_1 + v_A \tau_* = 0 \\ y_A = \dfrac{\alpha}{6}\tau_*^3 \end{cases} \tag{4}$$

dove si è posto $\tau_* = t_1 - t_*$.
A questo punto è facile ricavare:

$$\begin{cases} t_1 = -\dfrac{x_{0A}}{v_A} - \sqrt[3]{\dfrac{6y_A}{\alpha}} \\ \tau_* = \sqrt[3]{\dfrac{6y_A}{\alpha}} \end{cases} \tag{5}$$

Che fornisce un risultato identico a quello già ottenuto. □

E3) Un punto materiale si muove nello spazio secondo la seguente legge oraria:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0), & \textit{per } t \in [0, t_1] \\ (-R + v(t - t_1), 0, v(t - t_1)), & \textit{per } t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

dove $R = 1\,\mathrm{m}$, $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $v = 2\,\mathrm{m/s}$, $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ e $t_2 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2R}{v}$. Relativamente all'intervallo di tempo $[0, t_2]$, determinare lo spostamento, la distanza fra punto iniziale e finale, e la distanza percorsa.

Risoluzione. La traiettoria del punto materiale è costituita da una semicirconferenza nel piano x-y, centrata nell'origine e di raggio R, e da un segmento

[1]Cambiare cronometro equivale matematicamente a risolvere gli integrali mediante un cambio di variabile, metodo, questo, che verrà approfondito nei corsi di Analisi Matematica. Da un punto di vista strettamente matematico, dopo aver cambiato variabile, le funzioni $a_R(t)$, $v_R(t)$, $y_R(t)$ diventano, rispettivamente $\alpha\tau$, $\frac{\alpha}{2}\tau^2$, $\frac{\alpha}{6}\tau^3$, e costituiscono delle funzioni formalmente diverse da quelle relative al primo cronometro: noi continuiamo a chiamarle con lo stesso nome, $a_R(\tau)$, $v_R(\tau)$, $y_R(\tau)$ per comodità, trattandosi comunque di funzioni che rappresentano le medesime quantità fisiche.

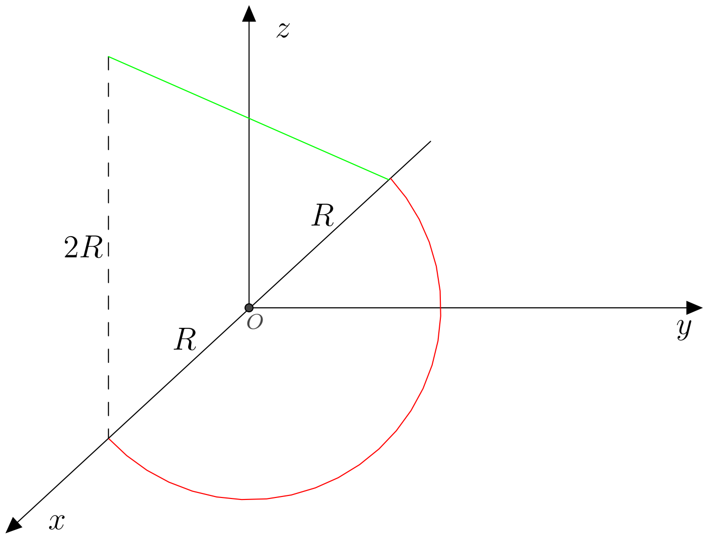

Figura 4: Esercizio E3)

di retta nel piano x-z, come si può vedere dalla Figura 4. Lo spostamento è dato dalla differenza vettoriale tra la posizione finale e la posizione iniziale assunta dal punto:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} :=& \vec{r}(t_2) - \vec{r}(0) = \Big(- R + v(t_2 - t_1), 0, v(t_2 - t_1)\Big) - \Big(R, 0, 0\Big) \\ =& \Big(- 2R + 2R, 0, 2R\Big) = \Big(0, 0, 2R\Big) = \Big(0, 0, 2\,\mathrm{m}\Big)\end{aligned}$$

La distanza fra punto iniziale e finale è per definizione la norma del vettore spostamento:

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

dove abbiamo indicato con Δx, Δy e Δz le componenti di $\Delta\vec{r}$. Nel nostro caso risulta:

$$\|\Delta\vec{r}\| = 2\,\mathrm{m}$$

La distanza percorsa è data dalla lunghezza della traiettoria. Nei corsi di Analisi Matematica, verrà data la definizione rigorosa del concetto di lunghezza di una curva generica (che soddisfi oppurtune condizioni). Nel nostro caso particolare, tuttavia, è assai semplice calcolare la lunghezza della traiettoria: basta infatti sommare la lunghezza della semicirconferenza alla lunghezza del tratto rettilineo. Indicata con γ l'intera traiettoria e con $l(\gamma)$ la sua lunghezza, abbiamo:

$$l(\gamma) = \pi R + 2\sqrt{2}R$$

Il primo termine rappresenta chiaramente la lunghezza della semicirconferenza; il secondo termine è stato calcolato tenendo conto che il tratto rettilineo della traiettoria costituisce la diagonale di un quadrato di lato $2R$ (come si vede facilmente dalla figura). Sostituendo i dati numerici otteniamo:

$$l(\gamma) = (\pi + 2\sqrt{2})\mathrm{m} \simeq 5.97\,\mathrm{m}$$

$\square$