

28360 - FISICA MATEMATICA 1

A.A. 2014/15

Problemi dal libro di testo: D. Giancoli, “Fisica”, 2a ed., CEA Capitolo 5

Problema 1 Un bimbo su una giostra si muove con una velocità di 1.25 m/s quando è a 1.10 m dal centro della giostra. Calcolate (a) l’accelerazione centripeta del bimbo e (b) la forza orizzontale totale esercitata su di lui (massa=25.0 kg).

Risoluzione. Il modulo dell’accelerazione centripeta è dato dalla seguente relazione:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

Nel nostro caso abbiamo $v = 1.25 \text{ m/s}$ e $r = 1.10 \text{ m}$, per cui, sostituendo, si ottiene:

$$a_R = \frac{(1.25 \text{ m/s})^2}{1.10 \text{ m}} = 1.42 \text{ m/s}^2$$

La forza orizzontale esercitata sul bambino è una forza centripeta, diretta verso il centro della giostra, di modulo:

$$F_R = ma_R = (25.0 \text{ kg}) \cdot (1.42 \text{ m/s}^2) = 35.5 \text{ N}$$

□

Problema 3 Calcolate l’accelerazione centripeta della Terra nella sua orbita attorno al Sole e la forza totale esercitata sulla Terra. Che cosa esercita questa forza sulla Terra? Assumete che l’orbita terrestre sia una circonferenza di raggio $1.50 \times 10^{11} \text{ m}$.

Risoluzione. Assimiliamo la Terra e il Sole a due punti materiali. L'accelerazione centripeta vale, in modulo:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

Noi disponiamo del raggio ma non della velocità, tuttavia, tutti sappiamo che la Terra compie una rivoluzione attorno al Sole in un anno. Un anno è composto (non esattamente) da 365 giorni. Il periodo di rivoluzione è quindi espresso in secondi da (approssimiamo il risultato a tre cifre significative):

$$T = 365 \text{ d} \cdot 24 \text{ h/d} \cdot 3600 \text{ s/h} = 31.5 \times 10^6 \text{ s}$$

In questo tempo, la Terra percorre un'orbita approssimativamente circolare di lunghezza pari a $2\pi r$, per cui la sua velocità orbitale è:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1.50 \times 10^{11} \text{ m}}{31.5 \times 10^6 \text{ s}} = 29.9 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Siamo così in grado di calcolare l'accelerazione centripeta:

$$a_R = \frac{(29.9 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{1.50 \times 10^{11} \text{ m}} = 5.96 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Assumendo per la massa della terra il valore $m_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, la forza totale agente su di essa ad opera dell'attrazione gravitazionale esercitata dal Sole, è data, in modulo, da:

$$F_R = m_T a_R = (5.97 \times 10^{24} \text{ kg}) \cdot (5.96 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2) = 3.56 \times 10^{22} \text{ N}$$

□

Problema 4 Una forza orizzontale di 210 N è applicata su un disco di massa 2.0 kg mentre ruota uniformemente, descrivendo una circonferenza orizzontale di raggio 0.90 m (la lunghezza di un braccio). Calcolate la velocità del disco.

Risoluzione. Se il disco ruota uniformemente, descrivendo una circonferenza orizzontale, allora la forza non può che essere centripeta. Dalla relazione

$$F_R = m a_R = m \frac{v^2}{r}$$

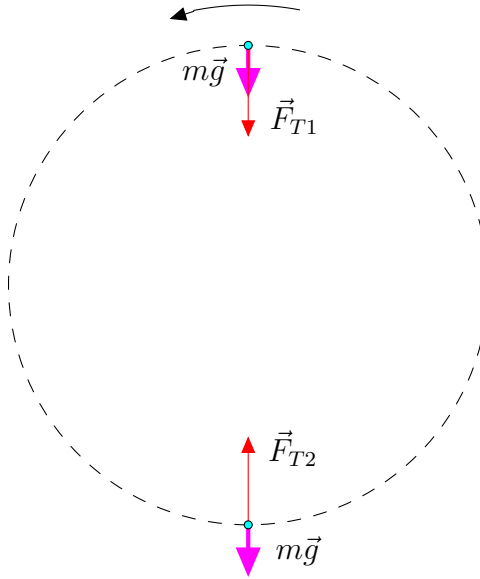


Figura 1: Problema 7.

dove F_R e a_R sono, rispettivamente, la forza e l'accelerazione centripete, m la massa del disco, v la sua velocità e r il raggio della circonferenza descritta, si ricava subito:

$$v = \sqrt{\frac{rF_R}{m}} = \sqrt{\frac{0.90 \text{ m} \cdot 210 \text{ N}}{2.0 \text{ kg}}} = 9.72 \text{ m/s}$$

□

Problema 7 Una pallina, legata all'estremità di una corda, viene fatta roteare a velocità costante su una circonferenza verticale di raggio 72.0 cm, come mostrato in Figura 1. Se la sua velocità è di 4.00 m/s e la sua massa è 0.300 kg, calcolate la tensione della corda quando la palla si trova (a) nel punto più alto e (b) nel punto più basso del suo percorso.

Risoluzione. Nei due punti presi in considerazione l'accelerazione è diretta verso il centro ed ha lo stesso modulo; tuttavia, la tensione non ha lo stesso modulo, in quanto nel punto più alto la forza di gravità si somma ad essa, mentre nel punto più basso si sottrae. Conveniamo di orientare la direzione verticale positivamente verso il basso. La seconda legge di Newton, applicata a tale direzione, dà:

$$P + F_T = a_R$$

dove P è la forza peso, F_T la tensione e a_R l'accelerazione centripeta. Nel nostro caso, si ottiene, rispettivamente per il punto più alto e più basso:

$$\begin{cases} mg + F_{T1} = m \frac{v^2}{r} \\ mg + F_{T2} = -m \frac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{T1} = 0.300 \text{ kg} \cdot \left(\frac{(4.00 \text{ m/s})^2}{0.720 \text{ m}} - 9.81 \text{ m/s}^2 \right) = 3.72 \text{ N} \\ F_{T2} = -0.300 \text{ kg} \cdot \left(-\frac{(4.00 \text{ m/s})^2}{0.720 \text{ m}} - 9.81 \text{ m/s}^2 \right) = -9.61 \text{ N} \end{cases}$$

□

Problema 8 Una palla di 45 kg attaccata all'estremità di una corda orizzontale viene fatta roteare in una circonferenza di raggio 1.3 m su una superficie priva di attrito. Se la corda si rompe quando la sua tensione supera i 75 N, qual è la massima velocità che può avere la palla?

Risoluzione. Sulla palla agisce la sola tensione esercitata dalla corda F_T in direzione radiale. Dalla seconda legge di Newton, applicata lungo questa direzione $F_T = ma_R$ (a_R è l'accelerazione centripeta) otteniamo:

$$F_T = m \frac{v^2}{r}$$

essendo r il raggio della circonferenza. Il modulo della velocità può essere espresso in funzione della tensione:

$$v = \sqrt{\frac{r F_T}{m}}$$

Da questa relazione si vede che la velocità è proporzionale alla radice quadrata della tensione; sostituendo il valore di tensione massima otteniamo la velocità massima con cui la palla può roteare senza che la corda si spezzi:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{1.3 \text{ m} \cdot 75 \text{ N}}{45 \text{ kg}}} = 1.47 \text{ m/s}$$

□

Problema 9 Un attrezzo per addestrare astronauti e piloti di aviogetti è progettato per fare ruotare gli allievi su una circonferenza orizzontale di raggio 12.0 m. Se la forza avvertita dall'allievo è 7.85 volte il loro peso, a quale velocità sta ruotando? Calcolate la risposta sia in m/s sia in giri/s.

Risoluzione. Detta F la forza centripeta che tiene ciascun allievo in rotazione sull'attrezzo, si può impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} F = m \frac{v^2}{r} \\ F = 7.85 \cdot mg \end{cases}$$

dove m è la massa dell'allievo, mg il suo peso, r il raggio della circonferenza e v la velocità periferica. Uguagliando i secondi membri delle due equazioni e risolvendo rispetto a v , otteniamo:

$$v = \sqrt{7.85 \cdot r \cdot g} = \sqrt{7.85 \cdot 12.0 \text{ m} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 30.4 \text{ m/s}$$

Ciascun allievo percorre un'intera circonferenza di lunghezza $2\pi r$ in un periodo T , per cui la velocità è data anche dalla seguente relazione:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Ricordando che la frequenza (numero di giri al secondo) è legata al periodo da:

$$f = \frac{1}{T}$$

si vede immediatamente che:

$$v = 2\pi r f$$

Per cui il numero di giri percorsi al secondo è:

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{30.4 \text{ m/s}}{2\pi \cdot 12.0 \text{ m}} = 0.403 \text{ s}^{-1}$$

□

Problema 17 Calcolate la forza di gravità esercitata dalla Terra su una navetta spaziale che si trova 12 800 km (2 raggi terrestri) al di sopra della superficie terrestre, se la sua massa è 1350 kg.

Risoluzione. Se la navetta si trova a 2 raggi terrestri, r_T , dalla superficie, allora la sua distanza dal centro terrestre è pari a $3r_T$. Essa subisce, ad opera della Terra, una forza gravitazionale, diretta verso il centro della Terra, di modulo pari a:

$$F = G \frac{mm_T}{(3r_T)^2}$$

dove abbiamo indicato con $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ la costante di gravitazione universale, con m la massa della navetta e con m_T la massa della Terra.

Noti i valori di m_T e r_T è possibile calcolare direttamente il valore di F , tuttavia, se si conosce il valore dell'accelerazione di gravità g in prossimità della superficie terrestre, allora, considerato che è:

$$g = G \frac{m_T}{r_T^2}$$

possiamo inserire quest'ultima espressione nella prima, ottenendo:

$$F = \frac{m}{9}g$$

Sostituendo i valori numerici si ha, finalmente:

$$F = \frac{1350 \text{ kg}}{9} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 1.47 \times 10^3 \text{ N}$$

□

Problema 18 Sulla superficie di un pianeta l'accelerazione gravitazionale ha modulo 12.0 m/s^2 . Una sfera di ottone di massa 21.0 kg viene portata su questo pianeta. Qual è (a) la massa di tale sfera sulla Terra e su quel pianeta, (b) il peso della sfera sulla Terra e sul pianeta?

Risoluzione. La massa di un corpo è una proprietà intrinseca di esso, per cui, sia che la sfera si trovi sulla Terra, sia che si trovi in qualunque altro luogo dell'Universo, la sua massa sarà sempre pari a 21.0 kg .

Il peso, invece, è la forza gravitazionale con cui la sfera viene attratta da un'altra massa, e quindi esso dipende anche dal valore di quest'ultima, secondo la legge di gravitazione universale di Newton. In particolare, la forza peso è direttamente proporzionale all'accelerazione con cui un oggetto è attratto e alla sua massa. Abbiamo, così, per il peso della sfera rispettivamente sul pianeta e sulla terra, i seguenti valori:

$$\begin{cases} P_P = 21.0 \text{ kg} \cdot 12.0 \text{ m/s}^2 = 252 \text{ N} \\ P_T = 21.0 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 206 \text{ N} \end{cases}$$

□

Problema 19 Calcolate l'accelerazione dovuta alla gravità sulla Luna. Il raggio della Luna è circa $1.74 \times 10^6 \text{ m}$ e la sua massa è $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$.

Risoluzione. Un oggetto posto sulla superficie della Luna *sente* un peso il cui modulo vale:

$$F = G \frac{mm_L}{r_L^2}$$

dove m è la massa dell'oggetto, m_L la massa della Luna e r_L il suo raggio. Per la seconda legge di Newton, applicata alla congiungente i due corpi, tale forza è pari al prodotto della massa m dell'oggetto per l'accelerazione che esso subisce:

$$ma = G \frac{mm_L}{r_L^2}$$

da cui, semplificando m , otteniamo il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie lunare:

$$a = G \frac{m_L}{r_L^2} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{7.35 \times 10^{22} \text{ kg}}{(1.74 \times 10^6 \text{ m})^2} = 1.62 \text{ m/s}^2$$

□

Problema 20 Un ipotetico pianeta ha raggio pari a 1.5 volte quello della terra, ma la stessa massa. Qual è l'accelerazione di gravità sulla sua superficie?

Risoluzione. L'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta può essere espressa dalla seguente relazione:

$$a = G \frac{m_T}{(1.5 \cdot r_T)^2} = G \frac{m_T}{r_T^2} \cdot \frac{1}{(1.5)^2}$$

dove, come al solito, G , m_T e r_T indicano, rispettivamente, la costante di gravitazione universale, la massa e il raggio della Terra.

L'espressione Gm_T/r_T^2 indica l'accelerazione di gravità g in prossimità della superficie terrestre. Così, abbiamo:

$$a = g \cdot \frac{1}{(1.5)^2} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{2.25} = 4.36 \text{ m/s}^2$$

□

Problema 21 Un ipotetico pianeta ha massa pari a 1.66 volte quella della Terra, ma lo stesso raggio. Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla sua superficie?

Risoluzione. L'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta può essere espressa dalla seguente relazione:

$$a = G \frac{1.66 \cdot m_T}{r_T^2} = 1.66 \cdot G \frac{m_T}{r_T^2}$$

dove, come al solito, G , m_T e r_T indicano, rispettivamente, la costante di gravitazione universale, la massa e il raggio della Terra.

L'espressione Gm_T/r_T^2 indica l'accelerazione di gravità g in prossimità della superficie terrestre. Così, abbiamo:

$$a = 1.66 \cdot g = 1.66 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 16.3 \text{ m/s}^2$$

□

Problema 22 Due oggetti si attraggono gravitazionalmente l'un l'altro con una forza di $2.5 \times 10^{-10} \text{ N}$ quando sono distanti 0.25 m. La loro massa totale è 4.0 kg. Trovate le singole masse.

Risoluzione. Dette m_1 e m_2 le masse degli oggetti, la legge di gravitazione universale (in modulo) dà:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

essendo r la distanza che li separa. Dai dati numerici a nostra disposizione possiamo ricavare il valore del prodotto delle due masse:

$$m_1 m_2 = \frac{F}{G} \cdot r^2 = \frac{2.5 \times 10^{-10} \text{ N}}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}} \cdot (0.25 \text{ m})^2 = 0.234 \text{ kg}^2$$

Inoltre conosciamo la massa totale, per cui possiamo risolvere il seguente semplice sistema:

$$\begin{cases} m_1 m_2 = 0.234 \text{ kg}^2 \\ m_1 + m_2 = 4.0 \text{ kg} \end{cases}$$

che dà come risultato:

$$\begin{cases} m_1 = 3.94 \text{ kg} \\ m_2 = 0.0594 \text{ kg} \end{cases}$$

□

Problema 23 Calcolate il valore effettivo di g , l'accelerazione di gravità, a (a) 3200 m e (b) 3200 km al di sopra della superficie terrestre.

Risoluzione. Il raggio terrestre vale $r_T = 6.37 \times 10^6$ m. Per calcolare il modulo dell'accelerazione di gravità a una generica quota h al di sopra del livello del mare ($h \geq 0$), basta sommare tale quota a r_T :

$$g(h) = G \frac{m_T}{(r_T + h)^2}$$

A questo punto possiamo effettuare un calcolo diretto per ottenere i valori richiesti, tuttavia è più istruttivo ricavarsi una formuletta che esprima la variazione dell'accelerazione di gravità con la quota e in funzione del suo valore g_0 alla superficie terrestre (che comunque, ricordiamo, è un valore medio). A tal fine, ricordiamo che:

$$g_0 = G \frac{m_T}{r_T^2}$$

da cui:

$$g_0 r_T^2 = G m_T$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella prima, otteniamo:

$$g(h) = \frac{g_0 r_T^2}{(r_T + h)^2}$$

Dividendo numeratore e denominatore a secondo membro per r_T^2 , si ha finalmente:

$$g(h) = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{r_T}\right)^2} \quad (1)$$

Calcoliamo adesso i valori richiesti nel testo del problema:

$$\begin{cases} g(3200 \text{ m}) = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{\left(1 + \frac{3200 \text{ m}}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}\right)^2} = 9.80 \text{ m/s}^2 \\ g(3200 \text{ km}) = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{\left(1 + \frac{3200 \times 10^3 \text{ m}}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}\right)^2} = 4.35 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

□

Problema 24 Qual è la distanza tra il centro della Terra e un punto al di fuori di essa in cui l'accelerazione di gravità dovuta alla Terra sia 1/10 del valore che ha sulla superficie terrestre?

Risoluzione. Utilizziamo la (1), ricavata nel Problema 23. Si ha:

$$\frac{g(h)}{g_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{r_T}\right)^2} = \frac{1}{10}$$

da cui:

$$\frac{(r_T + h)^2}{r_T^2} = 10 \implies r_T + h = r_T \sqrt{10} = 2.01 \times 10^7 \text{ m}$$

□

Problema 27 State spiegando ad alcuni amici perché gli astronauti avvertano assenza di peso mentre orbitano sullo shuttle ed essi ipotizzano che, semplicemente, lassù la gravità sia molto più debole. Provate a convincere loro e voi stessi che non è così, calcolando quanto è più debole la gravità 250 km al di sopra della superficie terrestre, in termini di g .

Risoluzione. Ancora, facendo riferimento alla (1) del Problema 23, otteniamo subito:

$$\frac{g(250 \times 10^3 \text{ m})}{g_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{250 \times 10^3 \text{ m}}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}\right)^2} = 0.926$$

Si vede bene che, a 250 km dalla superficie terrestre, l'accelerazione di gravità è ancora oltre il 92% del valore g_0 . A cosa è dovuta, allora, la sensazione di mancanza di peso che avvertono gli astronauti in orbita? Sostanzialmente al fatto che essi sono in caduta libera: un corpo che orbita attorno alla Terra sta cadendo verso di essa tanto quanto una mela che si stacca dall'albero, solo che il corpo in orbita *la manca* in continuazione! Per esso l'accelerazione di gravità è centripeta. Comunque, sia in caso di corpo orbitante, sia in caso di caduta radiale, se trascuriamo gli effetti dell'atmosfera (e se il corpo può essere schematizzato mediante il modello di punto materiale, in maniera tale da trascurare gli effetti di marea¹), allora tutte le parti di esso subiscono la stessa accelerazione per cui non si avverte l'effetto di nessuna forza ed è come se ci si trovasse in una regione priva di gravità²; la sensazione di peso che proviamo noi terrestri è un effetto del principio di azione e reazione: noi premiamo contro il pavimento ed esso, a sua volta, reagisce applicando sulle piante dei nostri piedi una forza uguale e contraria al nostro peso, ed è questa reazione che ci fornisce la sensazione di peso che avvertiamo.

□

Problema 28 Quattro sfere di massa 9.5 kg sono situate agli angoli di un quadrato di 0.60 m di lato. Calcolate quanto vale su una sfera, il modulo e la direzione dell'accelerazione di gravità dovuta alle altre tre.

Risoluzione. Facendo riferimento alla Figura 2 calcoliamo le forze agenti sulla sfera A ad opera dell'attrazione gravitazionale delle altre tre. Siano $\vec{F}_{AB}$, $\vec{F}_{AC}$ e $\vec{F}_{AD}$ tali forze. $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{AD}$ hanno lo stesso modulo F in quanto le sfere B e D hanno la stessa massa e la stessa distanza da A . Inoltre esse sono ortogonali tra loro, per cui la risultante, indicata in rosso in figura, giace lungo la diagonale congiungente le sfere A e C e ha modulo pari a $\|\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AD}\| = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2}$. Anche $\vec{F}_{AC}$ giace lungo la stessa diagonale. Per valutarne il modulo, basta considerare che $AC = l\sqrt{2}$ (con $l = 0.60$ m si è indicata la lunghezza del lato del quadrato), per cui si ha:

¹Gli effetti di marea sono dovuti sostanzialmente al fatto che un corpo esteso sperimenta diversi valori di accelerazione di gravità nei diversi punti che lo compongono: per esempio, la forza di gravità alla cima della nostra testa è più debole rispetto a quella esercitata sui nostri piedi, tuttavia l'effetto è del tutto trascurabile. Se invece il corpo ha dimensioni assai estese, per esempio nel caso di un corpo di dimensioni planetarie, e se la gravità in gioco è considerevole, allora le differenze possono diventare significative e, se il corpo non è molto coeso, possono portare allo sbriciolamento dello stesso. Una delle ipotesi sulla formazione degli anelli di Saturno coinvolge questo tipo di meccanismo.

²Questa osservazione apparentemente banale ed accidentale nasconde in realtà implicazioni assai profonde...

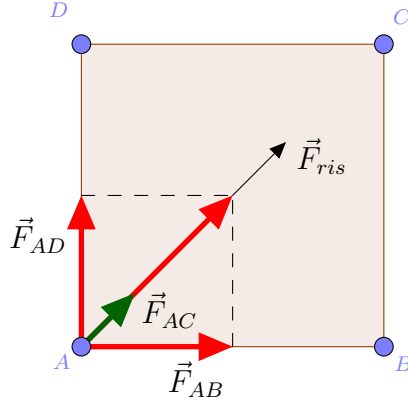


Figura 2: Problema 28.

$$\|\vec{F}_{AC}\| = G \frac{m^2}{(l\sqrt{2})^2} = \frac{F}{2}$$

in quanto si ha $F = Gm^2/l^2$. La risultante delle tre forze, indicata in nero in figura, agisce lungo la diagonale del quadrato ed è diretta verso il punto C. Il suo modulo vale:

$$\|\vec{F}_{ris}\| = F\sqrt{2} + \frac{F}{2} = F\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Tutto dipende dunque da F , modulo della forza gravitazionale agente tra una coppia qualunque di sfere contigue. Sostituendo i valori numerici troviamo:

$$\|\vec{F}_{ris}\| = G \frac{m^2}{l^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{(9.5 \text{ kg})^2}{(0.60 \text{ m})^2} \cdot 1.91 = 3.19 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Per ottenere il modulo dell'accelerazione di gravità con cui ciascuna sfera è attratta dalle altre tre basta dividere per la massa m :

$$a = \frac{3.19 \times 10^{-8} \text{ N}}{9.5 \text{ kg}} = 3.36 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$$

□