

28360 - FISICA MATEMATICA 1

A.A. 2014/15

Problemi dal libro di testo: D. Giancoli, “Fisica”, 2a ed., CEA Capitolo 6

Lavoro, forza costante: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

Problema 1 Quanto lavoro viene compiuto dalla forza di gravità quando un montacarichi di 265 kg cade di 2.80 m?

Risoluzione. Il montacarichi cade sotto l'effetto della sola forza di gravità, di modulo costante mg , diretta lungo la verticale, verso il basso. Forza e spostamento sono paralleli ed equiversi per cui, il lavoro compiuto dalla forza di gravità vale:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| = 265 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 2.80 \text{ m} = 7.28 \times 10^3 \text{ J}$$

□

Problema 2 Un pompiere di 65.0 kg sale una rampa di scale alta 20.0 m. Quanto lavoro deve compiere?

Risoluzione. Ad ogni gradino, il nostro pompiere deve salire di un piccolo tratto verticalmente, vincendo la forza di gravità che lo attira verso il basso. La forza che deve applicare è uguale e contraria al proprio peso, $\vec{F} = -m\vec{g}$, dove $\vec{g}$ è il vettore accelerazione di gravità, orientato verso il basso. Lo spostamento totale è mostrato in Figura 1. Il lavoro è dato da:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| \cdot \cos \alpha = 65.0 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20.0 \text{ m} = 12.8 \times 10^3 \text{ J}$$

□

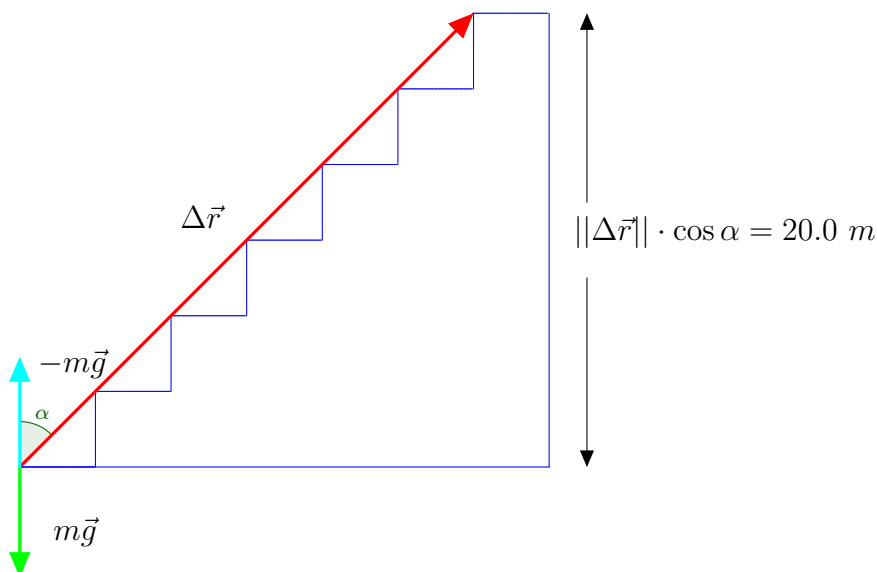


Figura 1: Problema 2

Problema 3 Una cassa pesante 1300 N è ferma sul pavimento. Qual è il lavoro necessario per spostarla a velocità costante (a) per 4.0 m sul pavimento, contrastando una forza d'attrito di 230 N e (b) per 4.0 m verticalmente?

Risoluzione. In entrambe le situazioni, per spostare la cassa a velocità costante dobbiamo applicare una forza eguale e contraria alla forza d'attrito e alla forza peso rispettivamente. Tali forze applicate sono costanti, parallele ed equiverse agli spostamenti, per cui il lavoro è dato semplicemente dal prodotto dei moduli delle forze e degli spostamenti:

$$\begin{cases} W_a = 230 \text{ N} \cdot 4.0 \text{ m} = 9.20 \times 10^2 \text{ J} \\ W_b = 1300 \text{ N} \cdot 4.0 \text{ m} = 5.20 \times 10^3 \text{ J} \end{cases}$$

□

Problema 4 Quale lavoro compiono i facchini quando spingono (orizzontalmente), senza accelerarla, una cassa di 160 kg per 10.3 m su una superficie ruvida, se il coefficiente d'attrito effettivo è 0.50?

Risoluzione. I facchini devono vincere la forza d'attrito, che vale, in modulo:

$$\|\vec{F}_a\| = k\|\vec{F}_\perp\|$$

dove k è il coefficiente d'attrito e $\vec{F}_\perp$ è la risultante delle forze che agiscono perpendicolarmente al piano della superficie, nel verso entrante. Nel caso in esame, tale forza è data semplicemente dal peso della cassa, per cui abbiamo $\|\vec{F}_\perp\| = mg$ e quindi:

$$\|\vec{F}_a\| = kmg$$

La forza applicata dai facchini (uguale ed opposta alla forza d'attrito) è costante, parallela ed equiversa allo spostamento, per cui si ha:

$$W = -\vec{F}_a \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}_a\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| = 0.50 \cdot 160 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 10.3 \text{ m} = 8.08 \times 10^3 \text{ J}$$

□

Problema 5 Una scatola di massa 5.0 kg viene accelerata orizzontalmente a partire da ferma a un tasso di 2.0 m/s^2 per 7.0 s. Trovate il lavoro totale compiuto sulla scatola.

Risoluzione. Se la scatola subisce un'accelerazione costante lungo la direzione orizzontale, la risultante delle forze che agiscono su di essa è data da:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

anch'essa costante e diretta lungo la direzione orizzontale, nello stesso verso dell'accelerazione. Il moto della cassa sarà dunque rettilineo e uniformemente accelerato; detta s l'ascissa che descrive la posizione della cassa, abbiamo:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove abbiamo posto $a = \|\vec{a}\|$. Essendo $v_0 = 0$, lo spostamento subito dalla cassa può scriversi nel seguente modo:

$$s(t) - s_0 = \frac{1}{2} a t^2$$

Dopo 7.0 s esso vale:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot 2.0 \text{ m/s}^2 \cdot (7.0 \text{ s})^2 = 49.0 \text{ m}$$

Il lavoro compiuto sulla scatola, in questo caso, è dato semplicemente dal prodotto dei moduli della forza e dello spostamento:

$$W = ma \cdot \Delta s = 5.0 \text{ kg} \cdot 2.0 \text{ m/s}^2 \cdot 49.0 \text{ m} = 490 \text{ J}$$

□

Problema 6 Otto libri, ciascuno dei quali spesso 4.3 cm e di massa 1.7 kg, giacciono coricati su un tavolo. Quale lavoro è necessario per impilarli uno sull'altro?

Risoluzione. Ogni volta che si solleva un libro, bisogna vincere il suo peso, quindi bisogna applicare una forza costante, parallela ed equiversa allo spostamento verticale subito, di modulo pari a $\|\vec{F}\| = mg$. Il primo libro si trova a quota zero, per cui su di esso non si compie lavoro. Il secondo libro deve essere sollevato al di sopra del primo, quindi di una quota pari a 4.3 cm, il terzo va sul secondo e quindi deve essere sollevato a una quota pari allo spessore di due libri e così via, fino ad arrivare all'ottavo libro, che deve essere sollevato al di sopra dei sette libri precedenti. Detto $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ il lavoro effettuato per sollevare il secondo libro sul primo (con $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$ paralleli ed equiversi, e $\|\Delta\vec{r}\| = 4.3 \text{ cm}$), si capisce facilmente che il lavoro complessivo è dato da:

$$W_{tot} = W + 2W + 3W + 4W + 5W + 6W + 7W = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot W = 28 \cdot W$$

Si tratta quindi di calcolare il valore di W :

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| = 1.7 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 4.3 \times 10^{-2} \text{ m} = 0.717 \text{ J}$$

Il lavoro totale vale dunque:

$$W_{tot} = 28 \cdot 0.717 \text{ J} = 20.1 \text{ J}$$

□

Problema 9 (a) Trovate la forza necessaria per dare a un elicottero di massa M un'accelerazione di $0.10 g$ verso l'alto. (b) Trovate il lavoro compiuto da questa forza nel sollevare l'elicottero a una distanza h verso l'alto.

Risoluzione. Orientando la verticale positivamente verso l'alto, l'elicottero è soggetto al proprio peso $P = -Mg$. Affinché riceva un'accelerazione positiva pari a $0.10 g$, è necessario applicare una forza F lungo la stessa direzione verticale, in maniera tale che la forza risultante sia, per la seconda legge di Newton, pari al prodotto della massa dell'elicottero per l'accelerazione subita:

$$F + P = M \cdot 0.10 \text{ g}$$

ovvero

$$F - Mg = M \cdot 0.10 \text{ g} \implies F = Mg + M \cdot 0.10 \text{ g} = 1.10Mg$$

Per sollevare l'elicottero a quota h tale forza deve compiere un lavoro dato dal prodotto scalare della forza stessa per lo spostamento, che si riduce al prodotto dei moduli in quanto i due vettori sono paralleli ed equiversi:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| = 1.10Mgh$$

□

Energia cinetica; teorema dell'energia cinetica

Problema 15 A temperatura ambiente, una molecola di ossigeno di massa $5.31 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ha tipicamente una energia cinetica di circa $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$. Con che velocità si muove?

Risoluzione. L'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove a velocità $\vec{v}$ è data dalla seguente relazione:

$$K = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 \tag{1}$$

Assimilando la nostra molecola a un punto materiale, il modulo della sua velocità può essere ricavato facilmente dalla (1):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}}{5.31 \times 10^{-26} \text{ kg}}} = 484 \text{ m/s}$$

□

Problema 16 (a) Se l'energia cinetica di una freccia viene raddoppiata, di quale fattore cresce la sua velocità? (b) Se la sua velocità viene raddoppiata, di quale fattore aumenta la sua energia cinetica?

Risoluzione. Siano $K_1 = 1/2 m \|\vec{v}_1\|^2$ e $K_2 = 1/2 m \|\vec{v}_2\|^2$ l'energia cinetica iniziale e finale della freccia.

(a) Se l'energia cinetica è stata raddoppiata abbiamo $K_2 = 2K_1$, ovvero:

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}_2\|^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \|\vec{v}_1\|^2$$

da cui si vede immediatamente che vale:

$$\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \sqrt{2}$$

b) Se viene raddoppiata la velocità abbiamo $\|\vec{v}_2\| = 2\|\vec{v}_1\|$, e quindi:

$$K_2 = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_2\|^2 = \frac{1}{2} m (2\|\vec{v}_1\|)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} m \|\vec{v}_1\|^2 = 4K_1$$

□

Problema 17 Quanto lavoro è necessario per fermare un elettrone ($m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) che si muove con una velocità di 1.90×10^6 m/s?

Risoluzione. Se l'elettrone passa da una velocità di modulo $\|\vec{v}\| = 1.90 \times 10^6$ m/s a velocità zero, esso subisce una variazione di energia cinetica pari a:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = -\frac{1}{2} \cdot 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1.90 \times 10^6 \text{ m/s})^2 = -1.64 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro compiuto da una forza agente su un punto materiale è pari alla variazione dell'energia cinetica del punto stesso, per cui, il valore appena trovato è proprio il lavoro necessario a fermare l'elettrone, negativo in quanto la forza deve essere frenante, ovvero di verso opposto alla velocità. □

Problema 18 Che lavoro è richiesto per fermare un'automobile di 1250 kg che viaggia a 105 km/h?

Risoluzione. Siamo nella stessa situazione del problema precedente, per cui basta applicare il teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta K = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1250 \text{ kg} \cdot (29.2 \text{ m/s})^2 = -532 \times 10^3 \text{ J}$$

□

Problema 19 Una freccia di massa 88 g viene scagliata da un arco la cui corda esercita una forza media di 110 N sulla freccia per una distanza di 78 cm. Qual è la velocità della freccia mentre lascia l'arco?

Risoluzione. Il lavoro compiuto dalla corda sulla freccia è dato semplicemente dal prodotto del modulo della forza per la distanza percorsa, in quanto forza e spostamento sono paralleli ed equiversi:

$$W = 110 \text{ N} \cdot 78 \times 10^{-2} \text{ m} = 85.8 \text{ J}$$

Tale lavoro è pari alla variazione dell'energia cinetica della freccia:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = 85.8 \text{ J}$$

dove $\|\vec{v}\|$ è la norma della velocità finale, mentre l'energia cinetica iniziale è chiaramente nulla, in quanto la freccia parte da ferma. Il modulo della velocità finale si calcola facilmente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85.8 \text{ J}}{88 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 44.2 \text{ m/s}$$

□

Problema 20 Una palla da baseball ($m = 140 \text{ g}$) che viaggia a 32 m/s, quando viene presa dal ricevitore sposta il guantone di 25 cm. Qual è la forza media esercitata dalla palla sul guantone?

Risoluzione. Il guantone esercita una forza sulla palla per frenarla pari alla variazione dell'energia cinetica della palla stessa:

$$W = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

dove, come al solito, con v si è indicato il modulo della velocità. La palla, a sua volta, esercita una forza uguale e contraria a quella del guantone, che quindi compie lo stesso lavoro ma questa volta positivo, in quanto forza e spostamento sono concordi. Detta F tale forza, abbiamo quindi:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = F \Delta s$$

da cui:

$$F = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{\Delta s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{140 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot (32 \text{ m/s})^2}{25 \times 10^{-2} \text{ m}} = 287 \text{ N}$$

□

Problema 21 Se la velocità di un'automobile viene aumentata del 50 %, di quale fattore aumenterà la sua distanza minima di frenata, supponendo che tutti gli altri parametri rimangano immutati? Trascurate il tempo di reazione del pilota.

Risoluzione. I freni dell'automobile compiono un lavoro negativo su di essa per frenarla applicando una forza media antiparallela allo spostamento. Sia $F = -ma$ tale forza, dove m è la massa dell'automobile, a il valore assoluto della decelerazione (abbiamo scelto di orientare positivamente l'asse su cui descriviamo il moto nel verso dello spostamento dell'auto, sicché la forza frenante risulta negativa), il lavoro compiuto sull'automobile vale:

$$W = -ma \cdot \Delta s$$

dove Δs è lo spazio di frenata. Per il teorema dell'energia cinetica, tale lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica dell'automobile, che passa da una certa velocità di modulo v a velocità zero:

$$-ma \cdot \Delta s = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

da cui:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$$

Se la velocità aumenta del 50%, ovvero passa da v a $3/2v$ la distanza di arresto aumenta del seguente fattore:

$$\Delta s' = \frac{1}{2} \frac{(3/2v)^2}{a} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{9}{4} \Delta s$$

□

Problema 24 Quanto in alto può andare un sasso di 1.85 kg tirato verticalmente verso l'alto da qualcuno che compie su di esso un lavoro di 80.0 J? Trascurate la resistenza dell'aria.

Risoluzione. Il lavoro compiuto sul sasso, supponendo che esso parta da fermo, comporta una variazione di energia cinetica pari a:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = 80.0 \text{ J} \quad (2)$$

dove m è la massa del sasso e v il modulo della velocità raggiunta quando esso lascia la mano che lo lancia. Da questo momento in poi, il sasso si muove verso l'alto frenato dalla forza di gravità. Detto Δs lo spazio che riesce a percorrere prima di fermarsi e cominciare a tornare indietro, la forza gravitazionale compie su di esso un lavoro dato da:

$$W = -mg\Delta s$$

D'altro canto, il sasso passerà dalla velocità v a velocità nulla, per cui subirà una variazione di energia cinetica pari a:

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$W = \Delta K \iff -mg\Delta s = -\frac{1}{2}mv^2$$

da cui:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

Il valore di v si può ricavare facilmente dalla (2):

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 80.0 \text{ J}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80.0 \text{ J}}{1.85 \text{ kg}}} = 9.30 \text{ m/s}$$

Per cui, in definitiva, la quota raggiunta vale:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{(9.30 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 4.41 \text{ m}$$

□

Problema 25 Un carico di 285 kg viene sollevato verticalmente di 22.0 m mediante un singolo cavo, con un'accelerazione $a = 0.160g$. Determinate (a) la tensione nel cavo, (b) il lavoro totale compiuto sul carico, (c) il lavoro compiuto dal cavo sul carico, (d) il lavoro compiuto dalla gravità sul carico ed (e) la velocità finale del carico, assumendo che sia partito da fermo.

Risoluzione. Orientiamo la verticale positivamente verso l'alto. Dalla seconda legge di Newton, applicata a tale direzione, abbiamo:

$$F - mg = ma$$

dove F è la tensione del cavo. Abbiamo, dunque:

$$F = ma + mg = 0.160mg + mg = 1.160mg$$

La tensione agisce verso l'alto, nello stesso verso dello spostamento, per cui il lavoro compiuto dal cavo è:

$$W = F \cdot \Delta s = 1.160mg \cdot 22.0 \text{ m} = 1.160 \cdot 285 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 22.0 \text{ m} = 71.4 \times 10^3 \text{ J}$$

La gravità, invece, compie un lavoro negativo pari a:

$$W = -mg \cdot \Delta s = -285 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 22.0 \text{ m} = -61.5 \times 10^3 \text{ J}$$

Il lavoro totale sul carico è dato dal lavoro della forza risultante:

$$W = ma \cdot \Delta s = 285 \text{ kg} \cdot 0.160 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 22.0 \text{ m} = 9.84 \times 10^3 \text{ J}$$

Supponendo che il carico parta da fermo, la variazione di energia cinetica, pari al lavoro della forza risultante, è:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 9.84 \times 10^3 \text{ J}$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.84 \times 10^3 \text{ J}}{285 \text{ kg}}} = 8.31 \text{ m/s}$$

□