

28360 - FISICA MATEMATICA 1

A.A. 2014/15

Problemi dal libro di testo:
D. Giancoli, “Fisica”, 2a ed., CEA
Capitolo 6

Energia potenziale

Problema 26 Una molla ha una costante elastica k uguale a 440 N/m. Di quanto deve essere allungata per accumulare 25 J di energia potenziale?

Risoluzione. L'energia potenziale di una molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 è data da:

$$U = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

L'allungamento necessario per accumulare 25 J di energia potenziale sarà dunque:

$$(l - l_0) = \sqrt{\frac{2U}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \text{ J}}{440 \text{ N/m}}} = 0.337 \text{ m}$$

□

Problema 27 Una scimmia di 7.0 kg salta da un ramo a un altro posto 1.2 m più in alto. Qual è la variazione di energia potenziale della scimmia?

Risoluzione. L'energia potenziale gravitazionale della scimmia vale (assumendo con buona approssimazione costante il campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre):

$$U = mgh$$

dove h è la quota. Pertanto, la variazione di energia potenziale per saltare da un ramo all'altro è data dalla seguente relazione:

$$\Delta U = mg\Delta h = 7.0 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1.2 \text{ m} = 82.4 \text{ J}$$

□

Problema 28 Di quanto cambia l'energia potenziale gravitazionale di un saltatore con l'asta di 64 kg se il suo centro di massa sale di circa 4.0 m durante il salto?

Risoluzione. Come nell'esercizio precedente, la variazione di energia potenziale gravitazionale vale:

$$\Delta U = mg\Delta h = 64 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 4.0 \text{ m} = 2.51 \times 10^3 \text{ J}$$

□

Problema 29 Un'automobile di 1200 kg che viaggia lungo un percorso orizzontale ha velocità $v = 65 \text{ km/h}$ quando va a urtare contro una molla d'acciaio in posizione orizzontale e viene fermata in 2.2 m. Qual è la costante di elasticità della molla?

Risoluzione. Consideriamo il sistema automobile-molla. L'energia meccanica iniziale vale:

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2$$

e consta del solo termine di energia cinetica dell'auto, in quanto la molla è a riposo. L'energia meccanica finale vale invece:

$$E_f = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

e consta del solo termine di energia potenziale elastica, in quanto alla fine del processo l'auto è ferma e la molla contratta di una quantità $l - l_0 = -2.2 \text{ m}$.

Per la conservazione dell'energia meccanica questi due valori devono coincidere:

$$E_i = E_f \iff \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \implies k = m\left(\frac{v}{l - l_0}\right)^2 = 80.8 \times 10^3 \text{ N/m}$$

□

Conservazione dell'energia meccanica

Problema 33 Jane, cercando Tarzan, corre alla sua massima velocità (5.3 m/s) e afferra una liana che penzola verticalmente da un alto albero nella giungla. Sino a che altezza dal suolo arriverà, appesa alla liana? È importante la lunghezza della liana?

Risoluzione. L'energia iniziale di Jane è solo cinetica in quanto corre al suolo:

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2$$

essendo m la massa di Jane e v il modulo della sua velocità.

Quando afferra la liana, comincia a salire verso l'alto seguendo una traiettoria circolare di raggio pari alla lunghezza della liana stessa. L'altezza massima sarà raggiunta quando la velocità sarà nulla: in tale istante, l'energia di Jane consta del solo termine di energia potenziale gravitazionale:

$$E_f = mgh$$

dove h è la quota raggiunta.

Per la conservazione dell'energia meccanica deve aversi:

$$E_i = E_f \iff \frac{1}{2}mv^2 = mgh \iff h = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(5.3 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 1.43 \text{ m}$$

La lunghezza della liana non è rilevante, a meno che non sia inferiore a 0.715 m; in tal caso infatti, la quota massima che si può raggiungere è inferiore a 1.43 m. □

Problema 34 Uno sciatore principiante, partendo da fermo, scivola giù senza attrito lungo un pendio inclinato di 35.0° la cui altezza in verticale è 185 m. Quale velocità avrà quando raggiungerà il punto più basso?

Risoluzione. Nel punto più basso l'energia totale dello sciatore sarà pari all'energia cinetica acquisita dalla caduta:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Tale valore deve essere uguale all'energia meccanica iniziale, pari all'energia potenziale gravitazionale dello sciatore quando si trova a quota $h = 185\text{ m}$:

$$E_i = mgh$$

Per la conservazione dell'energia meccanica, i due valori devono uguagliarsi:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\text{ m/s}^2 \cdot 185\text{ m}} = 60.3\text{ m/s}$$

□

Problema 35 A una slitta viene data una spinta verso l'alto, lungo un pendio inclinato di 28.0° , privo di attrito, ed essa raggiunge un punto più alto di 1.35 m rispetto al punto di partenza. Qual era la sua velocità iniziale?

Risoluzione. Il problema è del tutto analogo a quello precedente. L'unica differenza è che questa volta l'energia iniziale è soltanto cinetica mentre quella finale è soltanto potenziale, tuttavia ciò non cambia il modo in cui si ricava la velocità iniziale:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\text{ m/s}^2 \cdot 1.35\text{ m}} = 5.15\text{ m/s}$$

□

Problema 36 Nel salto in alto l'energia cinetica dell'atleta viene trasformata in energia potenziale gravitazionale senza l'ausilio di un'asta. Quale deve essere la velocità di stacco minima di un atleta affinché il suo centro di massa si innalzi di 2.10 m e possa oltrepassare l'asticella con una velocità di 0.70 m/s ?

Risoluzione. Scriviamo l'equazione che descrive la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2$$

dove, v_i è il modulo della velocità iniziale dell'atleta, m la sua massa, v_f il modulo della velocità finale e h la quota a cui si innalza il suo centro di massa. Se vogliamo che l'atleta raggiunga una quota di 2.10 m a una velocità $v_f = 0.70 \text{ m/s}$ la velocità di stacco v_i dovrà essere tale che:

$$\frac{1}{2}v_i^2 = gh + \frac{1}{2}v_f^2$$

ovvero

$$v_i = \sqrt{2gh + v_f^2} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 2.10 \text{ m} + (0.70 \text{ m/s})^2} = 6.46 \text{ m/s}$$

□

Problema 37 L'acrobata di un circo, di massa 65 kg, per esibirsi su un tappeto elastico salta verticalmente verso l'alto dalla cima di una piattaforma con una velocità di 5.0 m/s. (a) Quale sarà la sua velocità nell'atterrare sul tappeto elastico, 3.0 m più in basso? (b) Se il tappeto elastico si comporta come una molla di costante elastica $6.2 \times 10^4 \text{ N/m}$, di quanto si abbasserà?

Risoluzione. Nel momento in cui l'acrobata spicca il balzo verso l'alto, si trova a una quota h_i con una velocità in modulo v_i . Successivamente, dopo aver raggiunto una certa quota massima, comincia a cadere verso il basso, arrivando al tappeto a una quota h_f tale che $h_i - h_f = 3 \text{ m}$. Applicando la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

da cui:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_i - h_f)} = \sqrt{(5.0 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 3.0 \text{ m}} = 9.16 \text{ m/s}$$

Nel momento in cui l'acrobata tocca il tappeto, questo comincia ad abbassarsi elasticamente, frenando l'uomo: assimilando il tappeto a una molla di costante $k = 6.2 \times 10^4 \text{ N/m}$, e detta h'_f la quota finale raggiunta dall'acrobata nello sprofondare nel tappeto, abbiamo ancora dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}k(h'_f - h_f)^2 + mgh'_f$$

dove a secondo membro abbiamo l'energia potenziale elastica della molla dovuta alla variazione di quota $h'_f - h_f$ e l'energia potenziale dell'acrobata alla quota finale h'_f . Noi siamo interessati proprio alla variazione di quota $h'_f - h_f$, che può desumersi dall'ultima relazione scritta:

$$(h'_f - h_f)^2 + 2\frac{mg}{k}(h'_f - h_f) - \frac{m}{k}v_f^2 = 0$$

Risolvendo rispetto a $(h'_f - h_f)$ abbiamo:

$$h'_f - h_f = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{m}{k}v_f^2}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo due soluzioni, di cui una positiva e l'altra negativa. Noi siamo interessati alla soluzione negativa, in quanto sappiamo che la quota finale h'_f è minore rispetto a h_f . Quindi si ha:

$$h'_f - h_f = -0.307 \text{ m}$$

□

Problema 38 Un proiettile viene sparato a un angolo di 45.0° verso l'alto dalla cima di una rupe alta 265 m, con una velocità di 185 m/s. Quale sarà la sua velocità quando colpisce il suolo sottostante? (Usate la conservazione dell'energia).

Risoluzione. Applicando la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

dove m è la massa del proiettile, $v_i = 185 \text{ m/s}$ è il modulo della velocità iniziale, $h = 265 \text{ m}$ l'altezza della rupe e v_f il modulo incognito della velocità finale. È immediato ricavare quest'ultimo dalla formula precedente:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh} = \sqrt{(185 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 265 \text{ m}} = 199 \text{ m/s}$$

Il modo in cui abbiamo operato non tiene conto dell'angolo a cui viene sparato il proiettile. Questo suggerisce che esso sia irrilevante. Difatti, se proviamo a risolvere il problema a partire dalla legge oraria del moto parabolico dei proiettili, considerando un angolo θ generico, perveniamo (in un modo più macchinoso) allo stesso risultato qui ottenuto, cioè a un risultato che dipende solo dal modulo della velocità iniziale e dalla quota, e non dall'angolo.

L'applicazione della conservazione dell'energia nella risoluzione dei problemi, laddove sia possibile, conduce sempre a risultati più rapidi. □

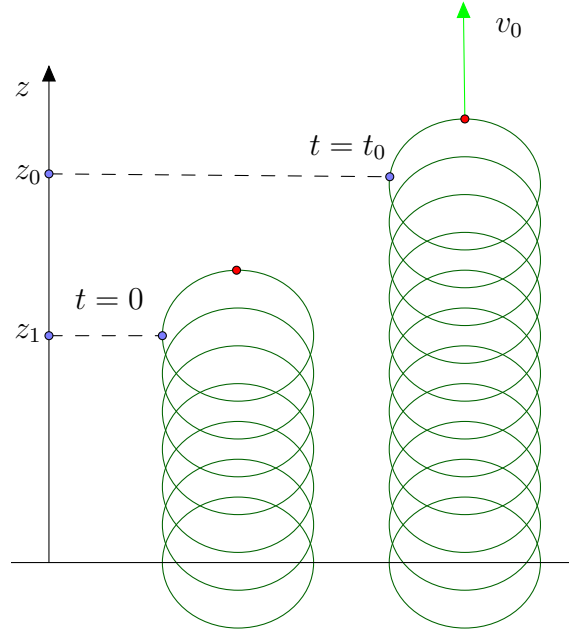


Figura 1: Problema 39

Problema 39 Una molla verticale (ignorare la sua massa), la cui costante elastica è 950 N/m , è fissata a un tavolo e viene compressa di 0.150 m . (a) Quale velocità verso l'alto può fornire a una palla di 0.300 kg , quando viene rilasciata? (b) A che altezza, rispetto alla sua posizione iniziale (molla compressa), può arrivare la palla?

Risoluzione. Facciamo riferimento alla Figura 1 e imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale in cui la molla è compressa nella posizione z_1 e l'istante t_0 in cui la palla viene rilasciata in corrispondenza della posizione di riposo z_0 della molla, tenendo presente che, nella posizione iniziale, la palla è ferma:

$$\frac{1}{2}k(z_1 - z_0)^2 + mgz_1 = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Da questa espressione possiamo ricavare il modulo della velocità al momento del rilascio:

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{(z_1 - z_0) \left[\frac{k}{m}(z_1 - z_0) + 2g \right]} \\
&= \sqrt{(-0.150 \text{ m}) \cdot \left[\left(\frac{950 \text{ N/m}}{0.300 \text{ kg}} \right) \cdot (-0.150 \text{ m}) + 2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \right]} \\
&= 8.27 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Dall'istante t_0 in poi la palla si muove verso l'alto frenata dalla sola forza di gravità, per cui la posizione e la velocità in funzione del tempo sono:

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \\ v(t) = v_0 - g(t - t_0) \end{cases}$$

La quota massima si raggiunge all'istante t^* tale che:

$$\begin{cases} z(t^*) = z_0 + v_0(t^* - t_0) - \frac{1}{2}g(t^* - t_0)^2 \\ 0 = v_0 - g(t^* - t_0) \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a $t^* - t_0$ otteniamo:

$$\begin{cases} z(t^*) = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \\ t^* - t_0 = \frac{v_0}{g} \end{cases}$$

Rispetto alla posizione iniziale z_1 la palla si innalza di una quantità pari a:

$$z(t^*) - z_1 = (z_0 - z_1) + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = 0.150 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(8.27 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 3.64 \text{ m}$$

□

Problema 42 Un'appassionata di bungee jumping di 62 kg salta da un ponte. È legata a una corda elastica, la cui lunghezza a riposo è 12 m, e cade per un totale di 31 m. (a) Calcolate la costante k della corda elastica, assumendo che si applichi la legge di Hooke. (b) Calcolate la massima accelerazione a cui sarà sottoposta la saltatrice.

Risoluzione. Orientiamo la direzione verticale positivamente verso l'alto. Nel momento in cui la donna si lancia dal ponte, si trova a una quota z_0 , a velocità zero; inoltre la corda non è sollecitata. L'energia totale sarà:

$$E = mgz_0$$

essendo m la massa della donna.

Quando sarà arrivata nel punto più basso z_2 , la molla sarà allungata al massimo e la donna sarà di nuovo ferma. Lo stesso valore dell'energia iniziale è espresso ora nel seguente modo:

$$E = mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1)^2$$

dove z_1 è la quota a cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo. Quindi, per la conservazione dell'energia, si ha:

$$mgz_0 = mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_2 - z_1)^2$$

da cui

$$k = 2mg \frac{z_0 - z_2}{(z_2 - z_1)^2}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$k = 2 \cdot 62 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{31 \text{ m}}{(-19 \text{ m})^2} = 105 \text{ N/m}$$

Finché la saltatrice non scende tanto da cominciare a tendere la corda, è sottoposta alla sola accelerazione di gravità, di modulo g . Dal momento in cui la corda comincia ad allungarsi, essa esercita una forza di richiamo rivolta verso l'alto, che quindi si oppone alla forza gravitazionale; da questo momento in poi la legge del moto, scritta per l'asse z , fornisce:

$$F = -mg - k(z - z_1)$$

$-mg$ è il peso della donna, mentre $-k(z - z_1)$ è la forza elastica della corda (si noti che essa è positiva, cioè rivolta verso l'alto, poiché stiamo considerando il moto a partire da $z \leq z_1$). Il termine gravitazionale rimane sempre costante, quello elastico diventa sempre più positivo: il massimo sarà raggiunto alla quota z_2 :

$$F_{max} = -mg - k(z_2 - z_1) = -62 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 - 105 \text{ N/m} \cdot (-19 \text{ m}) = 1.39 \times 10^3 \text{ N}$$

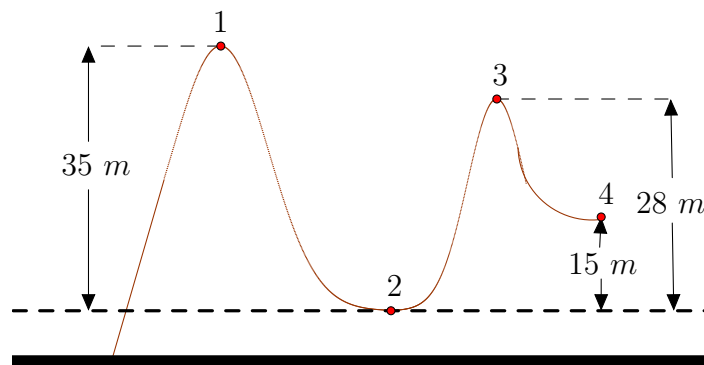


Figura 2: Problema 43

L'accelerazione massima vale dunque:

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{1.39 \times 10^3 \text{ N}}{62 \text{ kg}} = 22.4 \text{ m/s}^2$$

□

Problema 43 Il carrello delle montagne russe mostrato nella Figura 2 viene trasportato fino al punto 1, dove è abbandonato da fermo. Supponendo che non ci sia attrito, calcolate la velocità nei punti 2, 3 e 4.

Risoluzione. Siano, rispettivamente, h_1 , h_2 , h_3 , h_4 le quote dei punti al di sopra del livello del mare, indicato con la linea spessa nera in Figura 2. Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra il punto 1 e il punto 2:

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

con ovvio significato dei simboli utilizzati. È semplice ricavare v_2 :

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 35 \text{ m}} = 26.2 \text{ m/s}$$

Applichiamo adesso la conservazione dell'energia meccanica tra il punto 1 e il punto 3:

$$mgh_1 = mgh_3 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

ottenendo

$$v_3 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 7 \text{ m}} = 11.7 \text{ m/s}$$

Infine applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra il punto 1 e il punto 4:

$$mgh_1 = mgh_4 + \frac{1}{2}mv_4^2$$

ottenendo

$$v_4 = \sqrt{2g(h_1 - h_4)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m}} = 19.8 \text{ m/s}$$

□

Problema 44 Una palla di 0.40 kg viene lanciata con una velocità di 12 m/s a un angolo di 33°. (a) Qual è la velocità nel punto più alto e (b) a che altezza arriva? (Usate la conservazione dell'energia e trascurate la resistenza dell'aria).

Risoluzione. La palla compie un moto parabolico. Nella direzione verticale agisce la forza di gravità, che tende a decrementare la componente verticale della velocità. Lungo la direzione orizzontale il moto è rettilineo ed uniforme con velocità $v_x = 12 \text{ m/s} \cdot \cos(33^\circ) = 10.1 \text{ m/s}$. Nel punto più alto la velocità avrà come unica componente non nulla la componente orizzontale, per cui v_x è il modulo stesso della velocità in questo punto. Applicando la conservazione dell'energia tra il punto iniziale e il punto finale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgh + \frac{1}{2}mv_x^2 \implies \\ \frac{1}{2}v^2 &= gh + \frac{1}{2}v_x^2 \implies \\ \frac{v^2 - v_x^2}{2g} &= \frac{(12 \text{ m/s})^2 - (10.1 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 2.14 \text{ m} \end{aligned}$$

□

Problema 45 Un ingegnere deve progettare una molla da mettere in fondo alla tromba di un ascensore. Nella sfortunata eventualità di rottura del cavo in corrispondenza di un'altezza h dell'ascensore rispetto alla cima della molla,

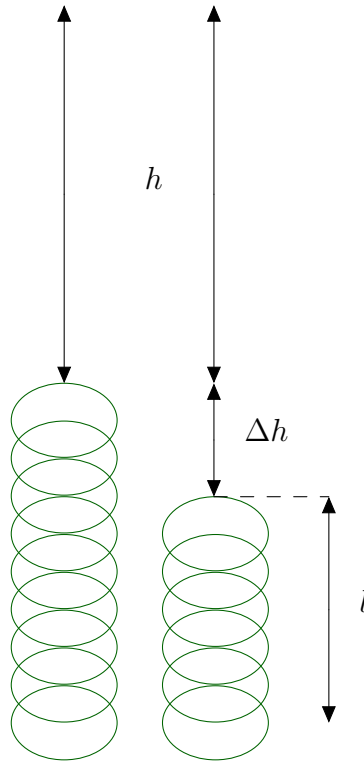


Figura 3: Problema 45

quale dovrebbe essere la costante elastica di tale molla affinché i passeggeri si salvino, subendo un'accelerazione massima nel fermarsi non superiore a $5.0\ g$? Assumete che la massa complessiva dell'ascensore e dei passeggeri sia M .

Risoluzione. Facendo riferimento alla Figura 3, applichiamo la conservazione dell'energia tra il momento in cui l'ascensore si trova fermo a quota h al di sopra della cima della molla e il momento in cui si trova, ancora fermo, sulla molla compressa di una quantità Δh :

$$Mg(h + \Delta h + l) = Mgl + \frac{1}{2}k(\Delta h)^2 \implies$$

$$Mg(h + \Delta h) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2$$

Nel momento di massima compressione, la forza subita dall'ascensore, ad opera dell'azione combinata della molla e della gravità, è data da:

$$Ma = k\Delta h - Mg$$

dove abbiamo orientato l'asse verticale positivamente verso l'alto (Δh rappresenta il modulo della variazione di quota, non il suo valore algebrico). Possiamo mettere a sistema le ultime due relazioni scritte:

$$\begin{cases} Mg(h + \Delta h) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2 \\ Ma = k\Delta h - Mg \end{cases}$$

e sostituire il valore $a = 5g$:

$$\begin{cases} Mg(h + \Delta h) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2 \\ 5Mg = k\Delta h - Mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} Mg(h + \Delta h) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2 \\ 6Mg = k\Delta h \end{cases}$$

Da cui, dopo un po' di semplice algebra, si ottiene:

$$\begin{cases} k = 12\frac{Mg}{h} \\ \Delta h = \frac{1}{2}h \end{cases}$$

□