32144 - MATEMATICA APPLICATA ALL'ARCHITETTURA, A.A. 2014/15

Foglio di esercizi n. 2

Superfici

1. Per ogni superficie parametrizzata qui sotto e per ogni punto indicato, determinare la forma parametrica e l'equazione cartesiana del piano tangente.

   (a) $r(s,t) = (s, t, s^2 + t^4)$; $\quad r(0,0), r(1,1)$

   (b) $r(s,t) = (s^2, st, s + \ln t)$; $\quad r(0,1), r(1,1)$

   (c) $r(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\theta)$; $\quad r(\pi/2, 0)$

   (d) $r(s,\varphi) = ((e^s + e^{-s})\cos\varphi, (e^s + e^{-s})\sin\varphi, e^s - e^{-s})$; $\quad r(0,\pi)$

2. Per le seguenti superfici parametrizzate determinare la mappa di Gauss ed il suo insieme immagine. Determinare inoltre il tipo di superficie in questione.

   (a) $r(s,t) = (1, -2 + s^2 - t^3, 2s^2 + t^3)$; $\quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$

   (b) $r(\varphi,t) = (\cos\varphi, \sin\varphi, t)$; $\quad (\varphi,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

   (c) $r(\varphi,t) = (2\cos\varphi, \sin\varphi, t)$; $\quad (\varphi,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

3. Per ogni superficie parametrizzata qui sotto e per ogni punto indicato, determinare le matrici rappresentative della prima e della seconda forma fondamentale, rispetto alla base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{T}_{r_0}S$ data dalle derivate parziali della funzione di parametrizzazione nel punto indicato.

   (a) $r(s,t) = (s, t, s^2 - t^2)$; $\quad r(0,0), r(0,1)$

   (b) $r(s,t) = (s, t, st)$; $\quad r(0,0), r(1,0)$

   (c) $r(s,t) = (s - st, t - t^3/3 + s, st)$; $\quad r(1,1)$

   (d) $r(\varphi,t) = ((1+t^2)\cos\varphi, (1+t^2)\sin\varphi, t)$, $\quad r(0,0)$

   (e) $r(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\theta)$; $\quad r(\pi/2, 0)$

   (f) $r(s,t) = (s + t^2, \ln t, 2)$; $\quad r(0,1)$

   (g) $r(s,t) = (2st, \cos s, \sin(s+t))$; $\quad r(0,0)$

4. Per le seguenti superfici parametrizzate, calcolare la curvatura normale $k_n = k_n(r_0, u)$, dove r_0 è il punto indicato e u è il vettore unitario di $\mathbb{T}_{r_0}S$ qui indicato in funzione delle sue componenti sulla base $\mathscr{B}$ (data dalle derivate parziali della funzione di parametrizzazione nel punto indicato).

   (a) $r(s,t) = (s, t, s^2 + t^4)$; $\quad r_0 = r(0,0),\ u = \left(\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial t}\right) / \left|\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial t}\right|$

   (b) $r(s,t) = (e^t, s - t; e^t - s^2)$; $\quad r_0 = r(0,0),\ u = \frac{\partial r}{\partial s} / \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|$

   (c) $r(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\theta)$; $\quad r_0 = r(\pi/2, 0),\ u = \left(\frac{1}{3}\frac{\partial r}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right) / \left|\frac{1}{3}\frac{\partial r}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right|$

5. Per ogni superficie parametrizzata qui sotto e per ogni punto indicato, determinare le curvature principali e le direzioni principali. *[È possibile usare i conti svolti per gli esercizi precedenti.]*

   (a) $r(s,t) = (s, t, s^2 + t^4)$; $\quad r(0,0), r(1,1)$

   (b) $r(s,t) = (s, t, st)$; $\quad r(0,0), r(1,0)$

   (c) $r(\varphi, t) = ((1+t^2)\cos\varphi, (1+t^2)\sin\varphi, t)$, $\quad r(0,0)$

   (d) $r(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\theta)$; $\quad r(\pi/2, 0)$

   (e) $r(s,t) = (s + t^2, \ln t, 2)$; $\quad r(0,1)$