

Esempio di prova scritta di PROBABILITÀ E STATISTICA

1. Dato un campione statistico, descrivere la procedura esatta per calcolare il k -esimo percentile (k è un numero intero da 0 a 100). Dare inoltre una veloce spiegazione del concetto di k -esimo percentile.
2. Sia dato un vettore aleatorio (X, Y) su \mathbb{R}^2 , con densità congiunta $f(x, y) = g(x)h(y)$, dove g ed h sono funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Che condizione dobbiamo dare sugli integrali di g ed h affinché quanto sopra abbia senso? Quali sono le densità marginali di X e di Y ? Possiamo dire che X e Y sono indipendenti?
3. In un campione di 15 test sanguigni, vengono rilevati i seguenti valori di colesterolo (espressi in mg/dl): 167, 190, 215, 184, 245, 203, 190, 194, 169, 211, 224, 198, 145, 188, 171. Calcolare media e mediana campionarie. Inoltre, dopo opportuno raggruppamento, disegnare un istogramma.
4. Sia dato un mazzo di 40 carte, composte da 10 coppe, 10 spade, 10 bastoni e 10 denari. Una volta mischiato il mazzo, si assume che tutti i possibili ordinamenti delle 40 carte siano equiprobabili. In questo caso:
 - (a) Qual è la probabilità che la settima carta sia l'asso di bastoni?
 - (b) Qual è la probabilità che il mazzo arrivi con i semi già ordinati (es., prima le coppe, ordinate dal'1 al 10, poi le spade, ordinate dal'1 al 10, ecc.; oppure, prima le denari, sempre ordinate, poi le bastoni, ecc. ecc.)?

[Le risposte possono essere anche date in forma non esplicita, con segni di fattoriale, ecc.]

5. Un terreno può essere sano oppure vi si può trovare l'inquinante 1 con probabilità 15%, l'inquinante 2 con probabilità 10%, o l'inquinante 3 con probabilità 5%. Se si trova un inquinante non se ne trovano altri. In presenza dell'inquinante 1, il raccolto sarà danneggiato con probabilità 75%. In presenza dell'inquinante 2, sarà danneggiato con probabilità 50%. In presenza dell'inquinante 3, sarà danneggiato con probabilità 25%. Se il terreno è sano, il raccolto non sarà danneggiato. Sapendo che il raccolto è danneggiato, qual è la probabilità che ciò sia dovuto all'inquinante 1?
6. Sia T il triangolo nel piano definito dalle disuguaglianze $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Due variabili aleatorie congiuntamente continue hanno densità congiunta f , dove $f(x, y) = 2$, se $(x, y) \in T$, e $f(x, y) = 0$, altrimenti. Scrivere la densità marginale $f_X(x)$ della variabile aleatoria X . Inoltre, qual è la probabilità che $X + Y \leq 1/2$?