Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA PER LE APPLICAZIONI A.A. 2015/16 - N2

1. In $k[x, y]$ con k campo si considerino i due polinomi $f = 3x^2y - xy(y-3) - y^2$, $g = -4x^2 + x(y^3 - 3) + y^3 + 1$.

   a) Si calcolino $\mathrm{Res}(f, g; x)$ e $\mathrm{Res}(f, g; y)$;

   b) Si stabilisca se i due polinomi f, g hanno un fattore comune di grado positivo in entrambe le variabili.

2. Siano $f, g \in k[x, y]$, con K campo, sia $I = (f, g) \subset k[x, y]$ e sia $I_1 = I \cap k[y]$ il primo ideale eliminazione di I.

   Si stabilisca se $\mathrm{Res}(f, g; x)$ genera I_1 nei seguenti casi:

   a) $f = xy - 1, g = x^2 + y^2 - 4$;

   b) $f = xy - 1, g = x^2y + y^2 - 4$.

   Esiste qualche legame tra i risultati ottenuti e il teorema di estensione?

3. Si considerino i polinomi $f = zx^2 - yxz + z^2 + 2, g = y^2 - 2xyz - z \in Q[x, y, z]$ e sia $I = (f, g) \subset Q[x, y, z]$.

   a) Si calcoli il risultante $R = \mathrm{Res}(f, g; x)$ e si stabilisca se esso genera l'ideale $(f, g) \cap \mathbb{Q}[y, z]$.

   b) Detta $\mathcal{S}$ la superficie di $\mathbb{C}^3$ definita dalle equazioni

   $$\begin{cases} zx^2 - yxz + z^2 = -2 \\ y^2 - 2xyz - z = 0 \end{cases}$$

   si stabilisca se $\mathbf{V}(R)$ è la più piccola varietà di $\mathbb{C}^2$ contenente $\pi(\mathcal{S})$, ove $\pi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ è definita da $\pi(x, y, z) = (y, z)$.

4. Sia $I = (f_1, f_2, f_3) \subset k[w, x, y, z]$, dove

   $$\begin{cases} f_1 = x^4 - 2xy^2 + zw \\ f_2 = wx^2 - w^2z + y \\ f_3 = x^3 + 3w. \end{cases}$$

   a) Si calcolino i risultanti generalizzati di f_1, f_2, f_3 rispetto a w.
   [Si debbono ottenere due polinomi $h_{10}, h_{01} \in k[x, y, z]$.]

   b) Si provi che i risultanti generalizzati non generano l'ideale $I \cap k[x, y, z]$.
   [Suggerimento: si usi l'ordine lessicografico con $w > z > y > x$.]

5. Si fornisca un esempio di ideale radicale proprio $I \subset k[x, y, z]$, con k campo non algebricamente chiuso, tale che $V(I) = \emptyset$.

6. Sia k un campo, siano f, g polinomi non costanti distinti dell'anello $K[x, y, z]$ e sia $I = (f^2, g^3)$. È possibile che $Rad(I)$ sia incluso strettamente in (f, g)? Motivate la risposta.

7. Stabilire se le seguenti affermazione sono vere e nel caso di risposta positiva si determini la più piccola potenza del polinomio che sta nell'ideale:

   a) $x - y \in Rad(x^3, y^3, xy(x + y))$;

   b) $x^2 + 2z \in Rad(x + z, x^2y, x - z^2)$.

8. Si provi la seguente caratterizzazione del massimo comun divisore di due polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, con k campo:

   "dati tre polinomi $f, g, h \in k[x_1, \cdots, x_n]$, allora $h = MCD(f, g)$ se e solo se h è un generatore del più piccolo ideale principale contenente (f, g), cioè $(h) \subset J$ per ogni ideale principale J contenente (f, g)".

9. Si determini una base per l'ideale $Rad(x^6 + x^4 + 2x^2 - x, x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1) \subset C[x]$.

10. Possibilmente senza far uso di Singular si stabilisca

    a) se l'ideale $(x^2, xy) \subset C[x, y]$ è un ideale radicale;

    b) se vale la seguente uguaglianza di ideali $(x^2, xy) = (x^2, xy, y^2)$;

    c) per quali $c \in C$ vale la seguente uguaglianza: $(x^2, xy) = (x^2, y + cx)$.

11. Si stabilisca se $f = x^3z^2 + x^2y + 2xyz^2 + 3yz + 6 \in (x+1, y-2, z-1) \subset C[x, y, z]$ e in caso positivo si scriva il polinomio come combinazione dei generatori dell'ideale.

12. Si provi che l'ideale $I = (x^2 - 4x + 7, y^2 + y + 1) \subset R[x, y]$ non è un ideale massimale.

13. Sia $I = (yz - x^2, y^5 - z^3) \subset Q[x, y, z]$.

    a) Si esprima la varietà $V(I)$ come unione di varietà irriducibili.
    [Si suggerisce di utilizzare le parametrizzazioni (t^4, t^3, t^5) e $(-t^4, t^3, t^5)$.]

    b) Si provi che I è un ideale radicale.