Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA COMPUTAZIONALE A.A. 2009/10 - N2

1. a) Si dimostri, senza far uso di COCOA, che l'ideale $I = (x - z, xy^2)$ di $\mathbb{R}[x, y]$ non è principale.

   b) Si stabilisca, motivando la risposta (e se necessario con l'ausilio di COCOA) se l'ideale $I = (x^2 - 2xy, xyz)$ di $\mathbb{R}[x, y, z]$ è principale.

2. In $k[x, y]$ con k campo si considerino i due polinomi $f = x^2y - 3xy^2 + x^2 - 3xy$, $g = x^3y + x^3 - 4y^2 - 3y + 1$.

   a) Si calcolino $\mathrm{Res}(f, g; x)$ e $\mathrm{Res}(f, g; y)$;

   b) Si stabilisca se i due polinomi f, g hanno un fattore comune di grado positivo in entrambe le variabili.

3. Siano $f, g \in k[x, y]$, con K campo, sia $I = (f, g) \subset k[x, y]$ e sia $I_1 = I \cap k[y]$ il primo ideale eliminazione di I.

   Si stabilisca se $\mathrm{Res}(f, g; x)$ genera I_1 nei seguenti casi:

   a) $f = xy - 1, g = x^2 + y^2 - 4$;

   b) $f = xy - 1, g = x^2y + y^2 - 4$.

   Esiste qualche legame tra i risultati ottenuti e il teorema di estensione?

4. Si considerino i polinomi $f = zx^2 - yxz + z^2 + 2, g = y^2 - 2xyz - z \in Q[x, y, z]$ e sia $I = (f, g) \subset Q[x, y, z]$.

   a) Si calcoli il risultante $R = \mathrm{Res}(f, g; x)$ e si stabilisca se esso genera l'ideale $(f, g) \cap \mathbb{Q}[y, z]$.

   b) Detta $\mathcal{S}$ la superficie di $\mathbb{C}^3$ definita dalle equazioni

   $$\begin{cases} zx^2 - yxz + z^2 = -2 \\ y^2 - 2xyz - z = 0 \end{cases}$$

   si stabilisca se $\mathbf{V}(R)$ è la più piccola varietà di $\mathbb{C}^2$ contenente $\pi(\mathcal{S})$, ove $\pi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ è definita da $\pi(x, y, z) = (y, z)$.

5. Sia $I = (f_1, f_2, f_3) \subset k[w, x, y, z]$, dove

   $$\begin{cases} f_1 = x^4 - 2xy^2 + zw \\ f_2 = wx^2 - w^2z + y \\ f_3 = x^3 + 3w. \end{cases}$$

   a) Si calcolino i risultanti generalizzati di f_1, f_2, f_3 rispetto a w.
   [Si debbono ottenere due polinomi $h_{10}, h_{01} \in k[x, y, z]$.]

   b) Si provi che i risultanti generalizzati non generano l'ideale $I \cap k[x, y, z]$.
   [Suggerimento: si usi l'ordine lessicografico con $w > z > y > x$.]

6. Si fornisca un esempio di ideale radicale proprio $I \subset k[x_1, \cdots x_n]$, con k campo non algebricamente chiuso, tale che $V(I) = \emptyset$.

7. Sia k un campo, siano f, g polinomi non costanti distinti dell'anello $K[x, y, z]$ e sia $I = (f^2, g^3)$. È necessariamente vero che $Rad(I) = (f, g)$? Motivate la risposta.

8. Stabilire se le seguenti affermazione sono vere e nel caso di risposta positiva si determini la più piccola potenza del polinomio che sta nell'ideale:

   a) $x + y \in Rad(x^3, y^3, xy(x + y))$;

   b) $x^2 + 3xz \in Rad(x + z, x^2y, x - z^2)$.

9. Si provi la seguente caratterizzazione del massimo comun divisore di due polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, con k campo:

   "dati tre polinomi $f, g, h \in k[x_1, \cdots, x_n]$, allora $h = MCD(f, g)$ se e solo se h è un generatore del più piccolo ideale principale contenente (f, g), cioè $(h) \subset J$ per ogni ideale principale J contenente (f, g)".

10. Si determini una base per l'ideale $Rad(x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x, x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1) \subset C[x]$.

11. Si provi che l'ideale $(xy, xz, yz) \subset C[x, y, z]$ è un ideale radicale.

12. Si mostri che $f = x^2z - 6y^4 + 2xy^3z \in (x - 3, y + 1, z - 2 \subset C[x, y, z]$ scrivendo il polinomio come combinazione dei generatori dell'ideale.

13. Si provi che l'ideale $I = (x^2 - x + 2, y^2 - y + 1) \subset R[x, y]$ non è un ideale massimale. [Suggerimento: si provi che $R[x, y]/(x^2 - x + 2)$ è isomorfo a $C[y]$.]

14. Sia $I = (xz - y^2, z^5 - y^3) \subset Q[x, y, z]$.

    a) Si esprima la varietà $V(I)$ come unione di varietà irriducibili.
    [Si suggerisce di utilizzare le parametrizzazioni (t^3, t^4, t^5) e $(t^3, -t^4, t^5)$.]

    b) Si esprima l'ideale I come intersezione di ideali primi che sono ideali quozienti di I.

    c) Si provi che I è un ideale radicale.