Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2015/2016*

Scuola di ***di Scienze***

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Complementi di Algebra e Geometria per le Applicazioni**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **prof. Ruediger Achilles**

Data inizio Lezioni *24 febbraio 2016*

Data fine Lezioni *13 maggio 2016*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***24 febbraio 2016***

Introduzione al corso: obiettivi, modalitá d'esame, informazioni varie. Breve presentazione dei contenuti del corso.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Ruediger Achilles e Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***24 febbraio 2016***

L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo: algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo; $K[x]$ é un dominio a ideali principali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g é un generatore dell'ideale (f, g). Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore; coefficienti di Bezout.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***1 marzo 2016***

L'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione.
Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. Algoritmo della divisione in $K[x_1, \cdots x_n]$ e discussione di alcuni esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***2 marzo 2016***

Ideali monomiali. Lemma di Dickson. Esempi. Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Esempi.
Teorema della base di Hilbert. In $K[x_1, \cdots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali é stazionaria.
Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***8 marzo 2016***

Unicitá del resto rispetto ad una base di Gröbner. S-polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Teorema di Buchberger. Ogni ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Algoritmo per la determinazione di una base di Gröbner . Esempi.
Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Esempi. Unicita' della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***9 marzo 2016***

Dimostrazione dell'unicita' della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi. Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale.
Teorema di eliminazione. Determinazione di una base di Gröbner di un ideale eliminazione. Esempi.
Insiemi algebrici affini: definizione e prime proprietá. Ideale di $K[x_1, \cdots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n; ideale di definizione di un insieme algebrico affine e sue proprietá. L'ideale di definizione di una varietá é un ideale radicale.
Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***15 marzo 2016***

Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali e sua interpretazione geometrica. Esempi.
Teorema di estensione e sua interpretazione geometrica.
Teorema di chiusura. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***16 marzo 2016***

Applicazione dell'eliminazione alla soluzione del problema dell implicitizzazione polinomiale. Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.
Determinazione delle equazioni cartesiane della piú piccola varieta' affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Enneper, ecc., si veda foglio distribuito a lezione).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***22 marzo 2016***

Teorema di implicitizzazione razionale. Discussione di alcuni esempi.
Polinomi irriducibili di $K[x_1, \cdots, x_n]$, decomposizione in irriducibili. Se un polinomio irriducibile $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ divide un prodotto deve dividere uno dei fattori. Due polinomi $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ di grado positivo in x_1 hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 se e solo se hanno un fattore comune in $K(x_2, \cdots, x_n)[x_1]$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***23 marzo 2016***

Esistenza e unicitá della decomposizione in irriducibili per polinomi in piú variabili. Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Proprietá del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati.
Risultante di due polinomi f e g di $K[x_1, \cdots, x_n]$ rispetto a x_1. Tale risultante é combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili $x_2, \cdots, x_n$ (quindi appartiene al primo ideale eliminazione dell'ideale (f, g)), inoltre e' identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in x_1.
Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***6 aprile 2016***

Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \cdots, f_s \in K[x_1, \cdots, x_n]$. Esempi. Cenni sulla dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale.
La corrispondenza ideali-varieta'. Esempi e considerazioni generali. Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole. Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni. Teorema degli zeri di Hilbert e sue conseguenze.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***13 aprile 2016***

Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n (con K algebricamente chiuso) e ideali radicali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ appartiene al radicale di un ideale $I = (f_1, \cdots, f_n) \subset K[x_1, \cdots, x_n]$. Radicale di un ideale principale di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Somma di ideali e intersezione di varietá; prodotto di ideali e unione di varietá.
Intersezione di ideali e unione di varietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***20 aprile 2016***

Algoritmo per l'intersezione di ideali. Esempi. Il prodotto e l'intersezione di due ideali hanno lo stesso radicale. Il radicale dell'intersezioe é l'intersezione dei radicali, ma il radicale del prodotto non é il prodotto dei due radicali. Esempi e esercizi.
Rilevazione didattica.
Varietá irriducibili e varietá riducibili. Corrispondenza tra varietá irriducibili e ideali primi. Cenni ai seguenti fatti: le varietá definite attraverso parametrizzazioni polinomiali o parametrizzazioni razionali sono irriducibili.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***27 aprile 2016***

Decomposizione di una varietá in un'unione finita di varietá irriducibili. Decomposizione minimale e sua unicitá. Decomposizione minimale di un ideale radicale in un'intersezione di ideali primi.
Se K é algebricamente chiuso c'e' una corrispondenza biunivoca tra punti di K^n e ideali massimali di $K[x_1, \cdots, x_n]$.
Applicazioni polinomiali tra varietá. Anello delle funzioni polinomiali su una varietá e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$ (con $I(V)$ ideale di definizione della varietá).
Studio dell'anello quoziente $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ (con I ideale polinomiale) come K-spazio vettoriale.
Solo enunciati: Condizioni necessarie e sufficienti affinché una varietá $V(I)$ sia costituita da un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***