



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico 2016/2017

Scuola di *di Scienze*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Complementi di Algebra e Geometria per le Applicazioni**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **prof. Ruediger Achilles**

Data inizio Lezioni 21 febbraio 2017

Data fine Lezioni 15 maggio 2017

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 21 febbraio 2017

Introduzione al corso: obiettivi, modalità d'esame, informazioni varie. Breve presentazione dei contenuti del corso.

Ore 1 (9-10) Firma (Ruediger Achilles e Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 21 febbraio 2017

L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo: algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo e suoi corollari; $K[x]$ é un dominio a ideali principali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g é un generatore dell'ideale (f, g) . Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore; coefficienti di Bezout. Massimo comun divisore di un numero finito di polinomi. L'anello $K[x_1, \dots, x_n]$. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione.

Ore 1 (10-11) Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 22 febbraio 2017

Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. L'ordine lessicografico é un buon ordinamento. Teorema della base di Hilbert. Algoritmo della divisione in $K[x_1, \dots, x_n]$ e discussione di alcuni esempi.

Ore 2 (9-11) Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 28 febbraio 2017

Discussione di un esempio che mostra che il resto della divisione in $K[x_1, \dots, x_n]$ non é unico. Ideali monomiali. Lemma di Dickson. Esempi. Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Esempi. Dimostrazione del teorema della base di Hilbert che utilizza il lemma di Dickson. In $K[x_1, \dots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali é stazionaria. Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale. Unicitá del resto rispetto ad una base di Gröbner.

Ore 2 (9-11) Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 1 marzo 2017

S-polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Criterio di Buchberger. Ogni ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Algoritmo di Buchberger per la determinazione di una base di Gröbner. Esempi.

Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Esempi. Unicità della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi.

Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale.

Ideali eliminazione di un ideale $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 8 marzo 2017

Insiemi algebrici affini: definizione e prime proprietà. Esempi. Ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n ; ideale di definizione di un insieme algebrico affine e sue proprietà. L'ideale di definizione di una varietà è un ideale radicale. Esempi.

Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \dots, x_n]$. Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali. Esempi. Teorema di estensione. Esempi

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 14 marzo 2017

Interpretazione geometrica dei teoremi di eliminazione e di estensione. Esempi. Teorema di chiusura. Esempi ed esercizi.

Applicazione dell'eliminazione alla soluzione del problema dell'implicitizzazione polinomiale. Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 15 marzo 2017

Determinazione delle equazioni cartesiane della più piccola varietà affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Enneper, ecc., si veda foglio distribuito a lezione).

Teorema di implicitizzazione razionale. Discussione di alcuni esempi.

Polinomi irriducibili di $K[x_1, \dots, x_n]$.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 22 marzo 2017

Se un polinomio irriducibile $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ divide un prodotto deve dividere uno dei fattori. Due polinomi $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo in x_1 hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 se e solo se hanno un fattore comune in $K(x_2, \dots, x_n)[x_1]$.

Esistenza e unicit  della decomposizione in irriducibili per polinomi in pi  variabili.

Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Propriet  del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati.

Risultante di due polinomi f e g di $K[x, y]$ rispetto a x .

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 28 marzo 2017

Risultante di due polinomi f e g di $K[x_1, \dots, x_n]$ rispetto a x_1 . Tale risultante   combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili x_2, \dots, x_n (quindi appartiene al primo ideale eliminazione dell'ideale (f, g)), inoltre   identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 . Esempi.

Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi.

Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$. Esempio. I risultanti generalizzati rispetto a x_1 appartengono al primo ideale eliminazione dell'ideale (f_1, \dots, f_s) .

La corrispondenza ideali-variet . Esempi e considerazioni generali. Lemma preparatorio alla dimostrazione del Nullstellensatz debole di Hilbert.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 29 marzo 2017

Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole. Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni. Teorema degli zeri di Hilbert e sue conseguenze. Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n (con K algebricamente chiuso) e ideali radicali di $K[x_1, \dots, x_n]$.

Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ appartiene al radicale di un ideale $I = (f_1, \dots, f_n) \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Radicale di un ideale principale di $K[x_1, \dots, x_n]$. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 4 aprile 2017

Somma di ideali e intersezione di variet ; prodotto di ideali e unione di variet . Intersezione di ideali e unione di variet . Il prodotto e l'intersezione di due ideali hanno lo stesso radicale. Il radicale dell'intersezione   l'intersezione dei radicali, ma il radicale del prodotto non   il prodotto dei due radicali. Esempi e esercizi.

Algoritmo per l'intersezione di ideali. Esempi.

Chiusura di Zariski di un sottoinsieme di k^n . Dimostrazione del teorema di chiusura

Cenni sul quoziente di ideali; chiusura di Zariski della differenza di due variet  e ideale quoziente degli ideali delle due variet . Esempi.

Variet  irriducibili e variet  riducibili.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 5 aprile 2017

Rilevazione didattica.

Corrispondenza tra varietà irriducibili e ideali primi. Le varietà definite attraverso parametrizzazioni polinomiali o parametrizzazioni razionali sono irriducibili.

Cenni alla decomposizione di una varietà in un'unione finita di varietà irriducibili, decomposizione minimale e sua unicità.

Se K è algebricamente chiuso c'è una corrispondenza biunivoca tra punti di K^n e ideali massimali di $K[x_1, \dots, x_n]$.

Applicazioni polinomiali tra varietà. Anello delle funzioni polinomiali su una varietà e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ (con $I(V)$ ideale di definizione della varietà).

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data

Ore 2 ()

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data 12 aprile 2017

Studio dell'anello quoziente $K[x_1, \dots, x_n]/I$ (con I ideale polinomiale) come K -spazio vettoriale. Esempi.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché una varietà $V(I)$ sia costituita da un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso. Esempi.

Correzione di due esercizi del Foglio N. 1 del 2015/16.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula VII piano

Data

Ore 2 ()

Firma (Mirella Manaresi)