



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico 2018/2019

Scuola di *di Scienze*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Complementi di Algebra e Geometria per le Applicazioni**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **prof. Silvia Benvenuti**

Data inizio Lezioni 18 febbraio 2019

Data fine Lezioni 10 maggio 2019

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) Seminario VIII piano

Data 18 febbraio 2019

Introduzione al corso: obiettivi, informazioni varie. Breve presentazione dei contenuti del corso.

L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo: algoritmo della divisione in $K[x]$ con K campo e suoi corollari; $K[x]$ è un dominio a ideali principali. Massimo comun divisore di due polinomi in $K[x]$. Il massimo comun divisore di due polinomi f, g è un generatore dell'ideale (f, g) . Algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore; coefficienti di Bezout. Massimo comun divisore di un numero finito di polinomi.

L'anello $K[x_1, \dots, x_n]$: monomi, termini, polinomi e funzioni polinomiali associate. Teorema della base di Hilbert. L'anello $K[x_1, \dots, x_n]$ è un anello noetheriano. In $K[x_1, \dots, x_n]$ ogni catena ascendente di ideali è stazionaria. Ordinamenti di monomi. Buoni ordinamenti e loro caratterizzazione. Ordini monomiali: ordine lessicografico, lessicografico graduato, lessicografico graduato inverso. Esempi.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 20 febbraio 2019

Algoritmo della divisione in $K[x_1, \dots, x_n]$ e discussione di alcuni esempi, in particolare di un esempio che mostra che il resto della divisione in $K[x_1, \dots, x_n]$ non è unico.

Definizione di ideale monomiale. Proprietà degli ideali monomiali. Esempi. Lemma di Dickson (enunciato).

Ideale monomiale generato dai termini principali dei polinomi di un ideale. Esempi. Base di Gröbner di un ideale polinomiale rispetto ad un ordine monomiale.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Seminario VIII

Data 25 febbraio 2019

Unicità del resto rispetto ad una base di Gröbner.

S -polinomio di due polinomi dati rispetto ad un ordine monomiale. Esempi. Criterio di Buchberger.

Cenno alla dimostrazione del teorema di Buchberger sugli S -polinomi. Ogni ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ ammette una base di Gröbner rispetto ad un fissato ordine monomiale. Algoritmo di Buchberger per la determinazione di una base di Gröbner. Esempi.

Basi di Gröbner minimali e basi di Gröbner ridotte. Esempi. Unicità della base di Gröbner ridotta rispetto ad un qualunque ordine monomiale. Esempi.

Confronto fra ideali; algoritmo per decidere l'appartenenza o meno di un polinomio a un ideale.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 27 febbraio 2019

Ideali eliminazione di un ideale $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Basi di Gröbner degli ideali eliminazione (Teorema di Eliminazione).

Insiemi algebrici affini: definizione e prime proprietà. Esempi. Ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ costituito dai polinomi che si annullano su un sottoinsieme di K^n ; ideale di definizione di un insieme algebrico affine. Esempi.

Sistemi di equazioni polinomiali. Sistemi equivalenti e ideali di $K[x_1, \dots, x_n]$. Applicazione del teorema di eliminazione alla soluzione di sistemi di equazioni polinomiali. Esempi. Teorema di estensione. Esempi

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Laboratorio Linux

Data 4 marzo 2019

Lezione fatta insieme al prof. Ruediger Achilles. Introduzione al sistema di computer algebra Singular. I comandi per definire anelli di polinomi (dotati di ordine monomiale), polinomi e ideali generati da polinomi, calcoli di basi di Grbner, cenno alla visualizzazione di curve e superficie (surf.lib). Introduzione al sistema di computer algebra CoCoA (Computations in Commutative Algebra), comandi per definire anelli di polinomi, ideali e per calcolare basi di Grbner, resti di divisione, S-polinomi. File di esempi, file della sessione Singular e file della sessione CoCoA.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 6 marzo 2019

Interpretazione geometrica dei teoremi di eliminazione e di estensione. Esempi. Teorema di chiusura. Esempi. Applicazione dell'eliminazione alla soluzione del problema dell'implicitizzazione polinomiale. Dimostrazione del teorema di implicitizzazione polinomiale. Esempi: la superficie delle rette tangenti a una cubica gobba.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Seminario VIII piano

Data 11 marzo 2019

Determinazione delle equazioni cartesiane della più piccola varietà affine contenente una data parametrizzazione polinomiale (ombrello di Whitney, superficie di Enneper, ecc., si veda foglio distribuito a lezione). Teorema di implicitizzazione razionale. Discussione di un esempio. Molteplicità di intersezione tra una curva piana e una retta in un punto. Punti singolari e punti regolari di una curva piana.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 13 marzo 2019

Applicazione della teoria dell'eliminazione alla ricerca dei punti singolari di una curva piana. Curva involuppo di una famiglia di curve piane. Sistema di equazioni che definiscono la curva involuppo e applicazione della teoria dell'eliminazione alla ricerca della sua equazione cartesiana. Matrice di Sylvester e risultante di due polinomi in una variabile. Proprietà del risultante. Esempi. Espressione del risultante come combinazione dei due polinomi dati. Problemi che si presentano nel tentativo di definire il risultante di due polinomi f e g di $K[x, y]$ rispetto a x . Due polinomi $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo in x_1 hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 se e solo se hanno un fattore comune in $K(x_2, \dots, x_n)[x_1]$ di grado positivo in x_1 (enunciato del teorema e discussione sulla necessità di provare alcuni lemmi preliminari).

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Seminario VIII piano

Data 18 marzo 2019

Risultante di due polinomi f e g di $K[x_1, \dots, x_n]$ rispetto a x_1 . Tale risultante é combinazione dei due polinomi dati e dipende solo dalle variabili x_2, \dots, x_n (quindi appartiene al primo ideale eliminazione dell'ideale (f, g)), inoltre e' identicamente nullo se e solo se i due polinomi dati hanno un fattore comune di grado positivo in x_1 . Esempi.

Dimostrazione del teorema di estensione nel caso di due soli polinomi.

Risultanti generalizzati di s polinomi $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$. Esempio. I risultanti generalizzati rispetto a x_1 appartengono al primo ideale eliminazione dell'ideale (f_1, \dots, f_s) (solo enunciato e cenno alla dimostrazione del teorema di estensione nel caso generale, usando i risultanti generalizzati).

La corrispondenza ideali-varietà. Esempi e considerazioni generali. Nullstellensatz debole di Hilbert (solo enunciato). Algoritmo per stabilire se un sistema di equazioni polinomiali non ha soluzioni.

Teorema degli zeri di Hilbert e alcuni suoi corollari.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 25 marzo 2019

Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n (con K algebricamente chiuso) e ideali radicali di $K[x_1, \dots, x_n]$.

Algoritmo per stabilire se un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ appartiene al radicale di un ideale $I = (f_1, \dots, f_n) \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Radicale di un ideale principale di $K[x_1, \dots, x_n]$. Esempi ed esercizi.

Somma di ideali e intersezione di varietà; prodotto di ideali e unione di varietà.

Intersezione di ideali e unione di varietà. Il prodotto e l'intersezione di due ideali hanno lo stesso radicale. Il radicale dell'intersezione é l'intersezione dei radicali, ma il radicale del prodotto non é il prodotto dei due radicali. Esempi e esercizi. Nel caso di ideali principali, l'ideale intersezione é generato dal minimo comune multiplo dei due generatori. Algoritmo per l'intersezione di ideali.

Quoziente di ideali. Esempi.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Seminario VIII piano

Data 1 aprile 2019

Chiusura di Zariski di un sottoinsieme di K^n . Dimostrazione del teorema di chiusura.

Chiusura di Zariski della differenza di due varietà. Quoziente di ideali. Esempi. Chiusura di Zariski della differenza di due varietà e ideale quoziente degli ideali delle due varietà. Esempi. Algoritmo per il calcolo del quoziente di due ideali. Varietà irriducibili e varietà riducibili. Corrispondenza tra varietà irriducibili e ideali primi. Su un campo infinito, le varietà definite attraverso parametrizzazioni polinomiali o parametrizzazioni razionali sono irriducibili.

Rilevazione didattica

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Aula Bombelli

Data 3 aprile 2019

Cenni alla decomposizione di una varietà in un'unione finita di varietà irriducibili.

Se K é algebricamente chiuso c'è una corrispondenza biunivoca tra punti di K^n e ideali massimali di $K[x_1, \dots, x_n]$.

Applicazioni polinomiali tra varietà. Anello delle funzioni polinomiali su una varietà e suo isomorfismo con l'anello quoziente di $K[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ (con $I(V)$ ideale di definizione della varietà).

Studio dell'anello quoziente $K[x_1, \dots, x_n]/I$ (con I ideale polinomiale) come K -spazio vettoriale. Esempi. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una varietà $V(I)$ sia costituita da un numero finito di punti. Stima sul numero di punti nel caso di un campo algebricamente chiuso. Discussione di alcuni esempi.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)

Luogo (Aula) Seminario VIII piano

Data 8 aprile 2019

Robot planari con giunti di rotazione e giunti telescopici: spazio dei giunti e spazio delle configurazioni. Problemi cinematici della robotica: problema cinematico diretto e problema cinematico inverso. Formula esplicita che fornisce la posizione della mano in funzione della posizione dei giunti nel caso di un robot con giunti di rotazione e nel caso di un robot con giunti di rotazione e giunti telescopici. Problema cinematico inverso e sistemi di equazioni polinomiali.

Cenni alle singolarità cinematiche.

Cenni ai sistemi polinomiali con parametri: esempi. Ideali dell'anello $k(t_1, \dots, t_m)[x_1, \dots, x_n]$ e specializzazioni. Specializzazioni e basi di Gröbner. Problema della ricerca di condizioni sufficienti affinché una base di Gröbner di un ideale $I \subset k(t_1, \dots, t_m)[x_1, \dots, x_n]$ rimanga una base di Gröbner di una specializzazione.

Ore 2 (9-11)

Firma (Mirella Manaresi)