Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2011/2012*

Facoltà ***Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali***

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Algebra Superiore**

Docente titolare del corso **prof. Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **Prof. Rita Fioresi**

Data inizio Lezioni *26 settembre 2011*

Data fine Lezioni *15 dicembre 2011*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Vitali***

Data ***29 settembre 2011***

Introduzione al corso: obiettivi, modalita' d'esame, ricevimento studenti, informazioni varie.
Richiami sugli anelli, sugli ideali, sulle operazioni sugli ideali. Radicale di un ideale. Sistemi di generatori per un ideale, ideale generato da un insieme di elementi, ideali principali, ideali finitamente generati. Anelli noetheriani.
L'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$ dei polinomi in n indeterminate. Se il campo K é infinito c'é corrispondenza biunivoca tra polinimi e funzioni polinomiali su K^n. Ideali di $K[x_1, \cdots, x_n]$ e insiemi algebrici affini di K^n. Esempi di sottonsiemi di K^n che non sono insiemi algebrici affini. Il teorema della base di Hilbert. Insiemi algebrici affini come spazio delle soluzioni di sistemi di equazioni polinomiali. L'ideale che definisce un insieme algebrico non é univocamente determinato. Sistemi equivalenti e ideali ad essi associati. Ideale di definizione di un insieme algebrico affine.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***6 ottobre 2011***

La corrispondenza ideali-varietá. Esempi e considerazioni generali. Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole. Teorema degli zeri di Hilbert. Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi algebrici affini di K^n (con K algebricamente chiuso) e ideali radicali di $K[x_1, \cdots, x_n]$. Esercizi sul radicale di un ideale. Somma di ideali e intersezione di varietá; prodotto di ideali e unione di varietá. Intersezione di ideali e unione di varietá. Quoziente di ideali e sue proprietá. Esempi. Chiusura di Zariski di un sottoinsieme di K^n. Chiusura di Zariski della differenza di due varietá e ideale quoziente degli ideali delle due varietá. Varietá irriducibili e varietá riducibili. Corrispondenza tra varietá irriducibili e ideali primi.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***13 ottobre 2011***

Ideali primi, ideali primari, ideali massimali. Esempi. Ideali massimali dell'anello dei polinomi in n variabili a coefficienti in un campo algebricamente chiuso. Se un ideale primo contiene un prodotto di ideali, allora contiene almeno uno degli ideali del prodotto. Il radicale di un ideale primario q é un ideale primo p ed é il piu' piccolo ideale primo che contiene q (l'ideale q si dice p-primario). Proprietá degli ideali primari. La potenza di un ideale primo puó non essere un ideale primario; le potenze di un ideale massimale m sono ideali m-primari. L'intersezione di ideali p- primari é un ideale p-primario.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***20 ottobre 2011***

Decomposizione primaria di un ideale, decomposizione minimale. In una decomposizione primaria minimale i radicali degli ideali primari sono univocamente determinati e non dipendono dalla particolare decomposizione. Primi isolati (minimali) e primi immersi associati a un ideale che ammette decomposizione primaria. Ogni ideale primo contenente un ideale decomponibile contiene un primo minimale associato all'ideale. Esempi. In una decomposizione primaria minimale i primari associati a primi isolati sono univocamente determinati.
Caratterizzazione degli anelli noetheriani attraverso la condizione della catena ascendente di ideali e l'esistenza di un elemento massimale in ogni famiglia non vuota di ideali dell'anello.

Ore 2 (13-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***27 ottobre 2011***

Ideali irriducibili. In un anello noetheriano ogni ideale irriducibile é primario (ma esistono primari non irriducibili). In un anello noetheriano ogni ideale si puo' rappresentare come intersezione di un numero finito di ideali irriducibili, quindi ogni ideale ammette una decomposizione primaria. Anelli quoziente e loro ideali. L'anello quoziente di un anello noetheriano é noetheriano. Decomposizione primaria di un ideale di un anello quoziente di un anello noetheriano. Anelli di frazioni e loro proprietá.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***3 novembre 2011***

Esercizi sulla decomposizione primaria in anelli di polinomi.
Esempi di anelli di frazioni. Localizzazione di un anello in un ideale primo.
Estensioni e contrazioni di ideali in anelli di frazioni: ogni ideale di $S^{-1}A$ é estensione di un ideale di A, corrispondenza biunivoca tra ideali di $S^{-1}A$ e ideali primi di A che non intersecano S. L'operazione S^{-1} commuta con la formazione di somme finite, prodotti, intersezioni, radicali. Ideali primari e anelli di frazioni; decomposizioni primarie minimali dell'estensione a $S^{-1}A$ di un ideale decomponibile di A; dimostrazione dell'unicitá delle componenti primarie minimali di un ideale decomponibile.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***10 novembre 2011***

Algoritmi per determinare una base degli ideali $I \cap J$ e $I : (f)$ dove I e J sono ideali dell'anello $K[x_1, \cdots, x_n]$ e $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$, conoscendo una base di I e J. Esempi.
Componenti irriducibili di una varietá riducibile. Decomposizione di una varietá algebrica in componenti irriducibili, decomposizioni minimali.
Se K é un campo infinito e $V \subset K^n$ é una varietá definita da equazioni parametriche polinomiali o razionali, allora V é irriducibile. Determinazione della decomposizione primaria dell'ideale $I = (xz - y^2, x^3 - yz) \in K[x, y, z]$.
Funzioni polinomiali su una varietá algebrica di K^n. Anello delle coordinate $K[V]$ di una varietá algebrica affine e suo isomorfismo con l'anello $K[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$. Corrispondenza biunivoca tra ideali di $K[V]$ e sottovarietá $W \subset V$.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***17 novembre 2011***

Mappa pull back di un'applicazione polinomiale tra varietá algebriche affini. Due varietá algebriche affini sono isomorfe se e solo se esiste un isomorfismo tra i loro anelli delle coordinate che é l'dentitá sull e funzioni costanti. Esempi. Campo delle funzioni razionali di una varietá algebrica irriducibile. Esempio di due varietá algebriche non isomorfe i cui campi delle funzioni razionali sono isomorfi.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***24 novembre 2011***

Altezza di un ideale primo e sue proprietá. Laltezza di un primo é zero se e solo se il primo é minimale. Altezza degli ideali primi di un PID. Esempi. Altezza di un ideale proprio. Se due ideali hanno lo stesso radicale, allora hanno la stessa altezza. Ogni anello non nullo ha almeno un ideale massimale. Dimensione di Krull di un anello. Esempi. Se A é un anello locale e M é il suo ideale massimale, allora $dimA = htM$. La dimensione di un anello é zero se e solo se ogni ideale primo é massimale, in particolare ogni campo ha dimensione zero. Per ogni ideale proprio I, $dimA/I \leq dimA$. Se P é un ideale primo di un anello A allora $dimA_P = htP$. Calcolo della dimensione di anelli quoziente di anelli di polinomi, calcolo di altezze di ideali in anelli di polinomi. Enunciato del teorema dell'ideale principale di Krull e del teorema di Krull generalizzato. Dimensione di un insieme algebrico affine.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***1 dicembre 2011***

Anelli artiniani e alcune loro proprietá (in un anello artiniano ogni ideale primo é massimale, il nilradicale é nilpotente). Un anello locale noetheriano di dimensione zero é artiniano. Un anello A é artiniano se e solo se é noetheriano e di dimensione zero. Lemma di Nakayama. Potenze simboliche di un ideale primo. Prima parte della dimostrazione del teorema dellideale principale di Krull.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Seminario I***

Data ***6 dicembre 2011***

Completamento della dimostrazione del teorema di Krull dell'ideale principale. Cenni sulla dimostrazione del teorema di Krull generalizzato. In un anello noetheriano il minimo numero di generatori di un ideale é sempre maggiore o uguale all'altezza dell'ideale. Ideali intersezione completa e ideali intersezione completa insiemistica. Esempi.

Ore 1 (14-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Seminario II***

Data ***13 dicembre 2011***

Se $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ con (k campo algebricamente chiuso) é un'intersezione completa insiemistica, allora $V = V(I)$ é intersezione di $codim_{k^n}V$ ipersuperficie. Breve storia del problema riguardante il numero di equazioni necessarie a definire una varietá algebrica.
Se I é un ideale proprio di un anello noetheriano con $ht(I) = r \geq 1$ allora si possono trovare $a_1, \cdots, a_r \in I$ tali che se $1 \leq i \leq r$ allora $ht(a_1, \cdots, a_r) = i$.
La dimensione di un anello locale é minore o uguale al numero minimo di elementi non nulli necessari per generare un ideale primario rispetto al massimale. Sistemi di parametri in un anello locale e loro proprietá. Gli elementi di un sistema di parametri sono analiticamente indipendenti. Basi minimali di un ideale di un anello locale. Esempi.

Ore 3 (14-17) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Bombelli***

Data ***15 dicembre 2011***

Ogni base minimale di un ideale I di un anello locale A contiene esattamente $dim_K I/IM$ elementi, dove M é il massimale di A e $K = A/M$. Anelli locali regolari.
Se A é un anello locale e $u_1, \cdots, u_n$ é una base minimale del massimale M, allora A é regolare se e solo se gli u_i sono analiticamente indipendenti.
Dipendenza integrale e chiusura integrale di un anello in un suo sopranello. Ideali di un anello locale regolare di dimensione uno.
Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello locale A di dimensione uno sia regolare é che sia un dominio e sia integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti.
Cenni sulle varie definizioni di dimensione di una varietá algebrica affine o proiettiva.

Ore 2 (12-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula)

Data

Ore ***Firma***

Luogo (Aula)

Data

Ore ***Firma***

Luogo (Aula)

Data

Ore ***Firma***