

Esercizio 1.

Nello spazio tridimensionale, in cui è fissato un riferimento cartesiano, si consideri il piano π di equazione $x + y + z = 1$ e il punto $P = (1, 1, 1)$.

- a) Si provi che il sistema di equazioni
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$
 rappresenta una retta r e si determini un punto e un vettore di direzione di tale retta.
- b) Si determinino le rette per il punto P e parallele al piano π .
- c) Si determinino tutte le rette dello spazio passanti per il punto P e incidenti la retta r di cui al punto a), stabilendo se esiste un piano che le contiene.
- d) Si stabilisca se esiste un piano α dello spazio tale che $d(\alpha, r) = d(\pi, r)$ dove r è la retta di cui al punto a).

Esercizio 2

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano $Oxyz$ si considerino la retta r di equazioni $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 - 2y \end{cases}$ e il punto $P = (0, 1, 1)$.

- a) Si determinino i piani π per P e paralleli alla retta r , si mostri che formano fascio indicandone il sostegno.
- b) Si determini tutte le rette per P e perpendicolari ad r , stabilendo se sono tutte tra loro complanari.
- c) Si determini una retta s per P , perpendicolare ad r e incidente con r . Tale retta è unica?
- d) Si determini un piano σ contenente la retta r e il punto P . Tale piano è unico?

Esercizio 3

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati i punti

$$P_0 = (0, 0, 0) \quad P_1 = (1, 0, 0) \quad P_2 = (0, 1, 0) \quad P_3 = (0, 0, 1)$$

e, al variare del parametro reale k , i punti

$$Q_0 = (k, 0, 0) \quad Q_1 = (k, 0, 2) \quad Q_2 = (1, 0, 0) \quad Q_3 = (-1, 1, 2 - k).$$

- a) Si scriva l'equazione del piano π passante per P_1, P_2, P_3 .

- b) Si scrivano tutti i piani passanti per il punto P_0 e ortogonali al piano π .
- c) Si scrivano le equazioni di una retta che interseca π in un solo punto.
- d) Al variare di k si stabilisca se i punti Q_0, Q_1, Q_2 sono allineati o generano un piano. Si scrivano poi le equazioni della retta (rispettivamente del piano) che contiene i punti.
- e) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali i punti Q_0, Q_1, Q_2 generano un piano che contiene il punto Q_3 .

Esercizio 4.

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati il punto $P_h = (1, -h, -1)$, con h parametro reale, e la retta

$$r: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Si determinino:

- a) i piani contenenti P_h e r , stabilendo se esistono valori di h per cui sono infiniti;
- b) i piani per il punto P_h e paralleli ad r ;
- c) tutte le rette del piano $x + 2y = 0$ sghembe con r ;
- d) la distanza di P_0 da r .