

**Esercizio 1.**

Nello spazio tridimensionale, in cui è fissato un riferimento cartesiano, si consideri il piano  $\pi$  di equazione  $x + y + z = 1$  e il punto  $P = (1, 1, 1)$ .

- a) Si provi che il sistema di equazioni 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$
 rappresenta una retta  $r$  e si determini un punto e un vettore di direzione di tale retta.
- b) Si determinino le rette per il punto  $P$  e parallele al piano  $\pi$ .
- c) Si determinino tutte le rette dello spazio passanti per il punto  $P$  e incidenti la retta  $r$  di cui al punto a), stabilendo se esiste un piano che le contiene.
- d) Si stabilisca se esiste un piano  $\alpha$  dello spazio tale che  $d(\alpha, r) = d(\pi, r)$  dove  $r$  è la retta di cui al punto a).

**Esercizio 2**

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano  $Oxyz$  si considerino la retta  $r$  di equazioni  $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 - 2y \end{cases}$  e il punto  $P = (0, 1, 1)$ .

- a) Si determinino i piani  $\pi$  per  $P$  e paralleli alla retta  $r$ , si mostri che formano fascio indicandone il sostegno.
- b) Si determini tutte le rette per  $P$  e perpendicolari ad  $r$ , stabilendo se sono tutte tra loro complanari.
- c) Si determini una retta  $s$  per  $P$ , perpendicolare ad  $r$  e incidente con  $r$ . Tale retta è unica?
- d) Si determini un piano  $\sigma$  contenente la retta  $r$  e il punto  $P$ . Tale piano è unico?

**Esercizio 3**

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati i punti

$$P_0 = (0, 0, 0) \quad P_1 = (1, 0, 0) \quad P_2 = (0, 1, 0) \quad P_3 = (0, 0, 1)$$

e, al variare del parametro reale  $k$ , i punti

$$Q_0 = (k, 0, 0) \quad Q_1 = (k, 0, 2) \quad Q_2 = (1, 0, 0) \quad Q_3 = (-1, 1, 2 - k).$$

- a) Si scriva l'equazione del piano  $\pi$  passante per  $P_1, P_2, P_3$ .

- b) Si scrivano tutti i piani passanti per il punto  $P_0$  e ortogonali al piano  $\pi$ .
- c) Si scrivano le equazioni di una retta che interseca  $\pi$  in un solo punto.
- d) Al variare di  $k$  si stabilisca se i punti  $Q_0, Q_1, Q_2$  sono allineati o generano un piano. Si scrivano poi le equazioni della retta (rispettivamente del piano) che contiene i punti.
- e) Si stabilisca se esistono valori di  $k$  per i quali i punti  $Q_0, Q_1, Q_2$  generano un piano che contiene il punto  $Q_3$ .

**Esercizio 4.**

Nello spazio tridimensionale in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati il punto  $P_h = (1, -h, -1)$ , con  $h$  parametro reale, e la retta

$$r: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Si determinino:

- a) i piani contenenti  $P_h$  e  $r$ , stabilendo se esistono valori di  $h$  per cui sono infiniti;
- b) i piani per il punto  $P_h$  e paralleli ad  $r$ ;
- c) tutte le rette del piano  $x + 2y = 0$  sghembe con  $r$ ;
- d) la distanza di  $P_0$  da  $r$ .