

Esercizio 1.

Si provi per induzione che se A è un insieme costituito da n elementi, allora la cardinalità dell'insieme delle parti $P(A)$ di A è 2^n .

Esercizio 2.

Un fruttivendolo deve sistemare poco meno di un migliaio di arance sui suoi banconi, ma disponendole a gruppi di 3 restano 2 arance, a gruppi di 4 ne avanzano 3, a gruppi di 5 ne avanzano 4, a gruppi di 6 ne rimangono 5 e finalmente riesce a sistamarle a gruppi di 7. Quante sono le arance?

Esercizio 3.

Sia G il sottogruppo additivo del campo \mathbb{Q} dei numeri razionali così definito:

$$G := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid (b, 10) = 1 \right\}.$$

- Si stabilisca se esistono due sottogruppi ciclici non nulli G_1, G_2 di G tali che $G_1 \cap G_2 = \{0\}$.
- Si stabilisca se esiste un sottogruppo H di G tale che il gruppo quoziente G/H abbia ordine 3.

Esercizio 4.

Sia \mathbb{C} il campo dei numeri complessi e sia $w = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i} \in \mathbb{C}$.

- Si calcolino le potenze w^2, w^6, w^{22} .
- Nel piano complesso si disegni l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |w|, \operatorname{Re}(z^2 - 4i) = 0\}.$$

Esercizio 5.

Sia \mathbb{Q} il campo dei numeri razionali e sia $u \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio irriducibile $x^4 - 2x^3 + x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

- Si determini un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $u^2 g(u) = 1$.
- Al variare dell'intero $k \in \mathbb{Q}$ si determini il grado $[\mathbb{Q}(u^2 + ku) : \mathbb{Q}]$. [Suggerimento: si osservi che $v = u^2 + ku \in \mathbb{Q}(u)$.]

Esercizio 6.

Nel piano, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane Oxy si consideri il triangolo T di vertici i punti $A = (-1, 0), B = (1, 0), C = (0, \sqrt{3})$.

- a) Si scrivano esplicitamente tutti gli elementi del gruppo G delle isometrie di T .
- b) Esiste una figura S che non é congruente a T ma ha gruppo delle isometrie isomorfo a G ?

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

- a) Ogni sottocampo del campo dei numeri complessi contiene i campi \mathbb{Q} e \mathbb{R} .
- b) Le scritture decimali $2,27\bar{9}$ e $2,28$ rappresentano lo stesso numero razionale.
- c) Il numero intero 97461 appartiene all'ideale dell'anello degli interi gaussiani $\mathbb{Z}[i]$ generato da $9 - 2i, 12 + i$ ed é somma di due quadrati.