Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2018/2019*

Scuola di *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica - Curriculum Didattico**

Insegnamento **Elementi di Algebra da un punto di vista superiore**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni *18 febbraio 2019*

Data fine Lezioni *20 maggio 2019*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***18 febbraio 2019***

Introduzione al corso: obiettivi, modalita' d'esame, informazioni varie.
Introduzione dei numeri naturali mediante gli assiomi di Peano. Il principio di induzione matematica. Definizione ricorsiva della somma tra numeri naturali e sue proprietá.
Definizione ricorsiva della moltiplicazione tra numeri naturali e sue proprietá.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***19 febbraio 2019***

Ordinamento $\leq$ tra numeri naturali e sue proprietá. $(N, \leq)$ é un insieme totalmente ordinato. Differenza di due numeri naturali. Relazioni fra somma, prodotto e $\leq$. Minorante e minimo di un sottoinsieme di N. Principio del minimo. La relazione $\leq$ é un buon ordinamento su N. Negli assiomi di Peano il principio di induzione puo' essere sostituita dalla richiesta dell'esistenza di un buon ordinamento nel quale ogni elemento sia minore o uguale del suo successivo.
Algoritmo euclideo in N. Nozione di divisibilitá tra due naturali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***21 febbraio 2019***

Successioni definite ricorsivamente.
Ordine $|$ su N^* definito attraverso la divisibilitá. $(N^*, |)$ é un insieme parzialmente ordinato. Legami tra gli ordinamenti $\leq$ e $|$.
Potenze e multipli di un numero naturale. Teorema rappresentazione di ogni naturale non nullo in base a con a naturale maggiore o uguale a due.
I numeri naturali come cardinali finiti: equipotenza come relazione dequivalenza in ogni insieme dinsiemi; le classi come numeri cardinali. Insiemi infiniti e insiemi finiti. I numeri naturali come insieme dei cardinali finiti. Gli insiemi equipotenti all'insieme dei numeri naturali si dicono numerabili.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***25 febbraio 2019***

Esercizi sui numeri naturali.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***26 febbraio 2019***

I numeri interi relativi: costruzione di Z a partire dall'insieme dei numeri naturali, definizione di somma e prodotto e verifica delle loro proprietá, ordine su Z, estensione della funzione successivo a tutto Z.
Richiami sugli anelli: dominio di integritá, zero-divisori, elementi invertibili, elementi associati, divisibilitá. Divisibilitá tra interi.
Algoritmo euclideo della divisione. Massimo comun divisore di due interi e di un numero finito di interi. Interi relativamente primi. Identitá di Bezout.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***28 febbraio 2019***

I coefficienti di Bezout non sono univocamente determinati. Alcune conseguenze dell'identitá di Bezout. Equazioni diofantee: condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni. Elementi irriducibili ed elementi primi di un anello. Unicitá della decomposizione di un intero in fattori primi. Richiami storici su risultati riguardanti i numeri primi: crivello di Eratostene, congettura di Gauss, Teorema dei numeri primi.
Richiami su congruenze, classi di resto, elementi invertibili di Z_m, piccolo teorema di Fermat, funzione di Eulero, teorema di Eulero.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***1 marzo 2019***

Esercizi su massimo comun divisore, identita' di Bezout, congruenze. correzioni di prove d'esame riguardanti gli interi e i naturali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***4 marzo 2019***

L'insieme degli interi é numerabile.
I numeri razionali. Costruzione di Q come campo quoziente di Z. Il campo dei numeri razionali é il piú piccolo campo contenente Z come sottoanello.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***5 marzo 2019***

Ordine totale sul campo dei numeri razionali: Q con la relazione $\leq$ é un campo ordinato e l'omomorfismo di anelli iniettivo da Z a Q rispetta l'ordinamento.
Proprietá di densitá di Q rispetto a $\leq$.
La notazione posizionale dei numeri razionali: i numeri razionali hanno tutti scrittura finita o scrittura periodica rispetto ad un intero $k \geq 2$. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 marzo 2019***

Un numero razionale a/b con $a, b \in Z, a, b > 0, (a, b) = 1$ ha scrittura finita in base k se e so o se ogni fattore primo di b divide k. Ogni scrittura finita o periodica su k cifre é la scrittura posizionale in base k di un numero razionale. Motivazioni algebriche e geometriche per estendere il campo dei numeri razionali. Assiomi dei numeri reali. Costruzione dei numeri reali attraverso le sezioni di Dedekind di Q.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***11 marzo 2019***

Esercizi sui numeri razionali.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***12 marzo 2019***

Definizione di somma di numeri reali. Verifica che la somma é associativa e commutativa ed esistenza dell'elemento neutro. Definizione della relazione d'ordine e del prodotto di numeri reali. L'insieme $(R, +, \dot{,} \leq)$ é un campo ordinato completo che contiene $(Q, +, \dot{,} \leq)$ come sottocampo ordinato. Q é denso nel campo dei numeri reali. R é un campo archimedeo.
Cenni alla costruzione di Cantor dei numeri reali. Successioni convergenti in un campo ordinato K, successioni di Cauchy, campi ordinati Cauchy-completi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***14 marzo 2019***

Costruzione del completamento secondo Cauchy $\tilde{K}$ di un campo ordinato K e sue proprietá. Se $K = Q$, il campo $\tilde{K}$ é archimedeo.
Un campo ordinato $(\tilde{K}, \leq)$ é completo se e solo se é Cauchy-completo e archimedeo. I reali costruiti con le sezioni di Dedekind e i reali costruiti con la costruzione di Cantor sono campi ordinati isomorfi.
Scrittura posizionale dei numeri reali. Numeri irrazionali.
I numeri reali sono un'infinitá pič he numerabile.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***18 marzo 2019***

Ogni campo ordinato archimedeo completo é isomorfo a R.
Esercizi sui numeri reali.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***19 marzo 2019***

Proprietá dell'estremo superiore. Il campo reale ha la proprietá dell'estremo superiore. Ogni campo ordinato con la proprietá dell'estremo superiore é isomorfo a R con un isomorfismo che preserva l'ordine.
Anelli ottenuti aggiungendo ad un anello la radice di un suo elemento. Somma e prodotto di elementi di $A[\sqrt{d}]$. Norma di un elemento di $A[\sqrt{d}]$. L'anello $A[\sqrt{d}]$ é un dominio se e solo se A é un dominio e non vi sono elementi non nulli con norma nulla. Se d é un intero che non é un quadrato, allora $Z[\sqrt{d}]$ é un dominio. Se K é un campo, allora $K[\sqrt{d}]$ é un campo se e solo se d non é un quadrato in K.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***21 marzo 2019***

Elementi invertibili di $A[\sqrt{d}]$.
l campo complesso come estensione di R con l'aggiunta della radice di -1. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi. Enunciato del Teorema di De Moivre. Formule di addizione per seno e coseno. Dimostrazione del Teorema di De Moivre come riformulazione delle formule di addizione per seno e coseno. Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi.
Radici n-esime dell'unitá nel campo complesso. Radici n-esime di un numero complesso: ogni numero complesso non nullo ha esttamente n radici n-esime distinte. Formule per le radici quadrate di un numero complesso.
Svolgimento di un esercizio sui numeri complessi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***25 marzo 2019***

Campi algebricamente chiusi e loro caratterizzazioni. Un campo algebricamente chiuso é infinito. Il campo dei numeri complessi é algebricamente chiuso (Sono stati distribuiti gli appunti con una dimostrazione). Richiami sulla molteplicitá delle radici di un polinmio a coefficienti in un campo. Conseguenze del teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio a coefficienti complessi si decompone in un prodotto di fattori lineari, un polinomio f a coefficienti complessi ammette esattamente deg$f$ radici se contate con molteplicitá. L'insieme A_C dei numeri algebrici é un campo algebricamente chiuso che contiene il campo Q e non é finitamente generato su Q. A_C si chiama chiusura algebrica di Q.

Radici dei polinomi a coefficienti reali. Se un polinomio a coefficienti reali f ha una radice complessa α di molteplicitá n allora ha anche il coniugato di α é radice di f di molteplicitá n. Il numero delle radici reali di un polinomio reale ha la stessa paritá del grado di f. Un polinomio a coefficienti reali di grado positivo si decompone nel prodotto di fattori lineari e di fattori quadratici con discriminante negativo.

Estensioni semplici di Q sia nel caso di estensione con un elemento algebrico, sia nel caso dell'estensione con un elemento trascendente. Esempi ed esercizi

Ore 2 (12-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***25 marzo 2019***

Esercizi su numeri complessi, numeri algebrici, estensioni del campo dei numeri razionali, fattorizzazioni in irriducibili di polinomi a coefficienti reali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***1 aprile 2019***

Estensioni di campi finitamente generate, semplici, finite, algebriche e trascendenti. Calcolo del grado di estensioni finite.

Richiami su campo di spezzamento di un polinomio. Calcolo del campo di spezzamento e del suo grado.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***2 aprile 2019***

Campi finiti e loro proprieta'. Campo di Galois di ordine p^n. Automorfismo di Frobenius. Un campo finito non é algebricamente chiuso. Campi di spezzamento di polinomi su campi finiti, Esempi ed esercizi.

Ore 3 (9-12) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***4 aprile 2019***

Derivata di un polinomio e sue proprietá. Derivata di un polinomio e radici multiple. Formula di Taylor per un polinomio.
Teorema di Fourier Budan. Esempi. Teorema di Rolle per i polinomi reali. Regola dei segni di Cartesio. Esempi. Successione di Sturm per un polinomio reale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***8 aprile 2019***

Seminario del prof. Marco Trozzo sull'introduzione dei numeri reali nella scuola secondaria.

Ore 2 (14.30-16) ***Firma (Marco Trozzo)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***9 aprile 2019***

Enunciato del teorema di Sturm e calcolo del numero degli zeri mediante il metodo di Sturm in un caso concreto.
Il gruppo delle isometrie del piano euclideo é costituito da traslazioni, rotazioni intorno a un punto fisso, simmetrie rispetto a una retta, glissosimmetrie (prodotto di una simmetria rispetto a una retta e di una traslazione parallela alla retta). Ricerca dei punti fissi, delle rette mutate in sé dalle isometrie.
Richiami sulle trasformazioni ortogonali di R^3. *Forme canoniche delle matrici di* $O(3)$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***11 aprile 2019***

Isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Punti fissi ed elementi uniti di un'isometria dello spazio. Il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale e' costituito da traslazioni, simmetrie ortogonali rispetto a un piano, composizioni di una simmetria ortogonale rispetto a un piano e una traslazione parallela al piano, rotazioni intorno a una retta, composizione di una rotazioni intorno a una retta con una traslazione parallela alla retta (rototraslazioni), composizione di una simmetria rispetto ad un piano con una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano (rotosimmetrie). Gruppo delle isometrie di una figura piana o dello spazio euclideo tridimensionale. Esempi ed esercizi.
Interpretazione delle trasformazioni ortogonali di R^2 *come applicazioni* R*-lineari di* C *in sé e uso di tale interpretazione per provare che: la composizione di una riflessione rispetto a una retta* L *per l'origine con una rotazione di angolo* θ *in senso antiorario é la riflessione lungo la retta* L' *ottenuta ruotando* L *in senso antiorario di un angolo di* $\frac{\theta}{2}$; *la composizione di due riflessioni é una rotazione.*
Definizione del gruppo diedrale D_n *e verifica che é un sottogruppo di* $O(2)$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***15 aprile 2019***

Ora richiesta dai rappresentanti degli studenti per i colloqui del C.d.L. in Matematica con gli studenti dell'indirizzo didattico.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***16 aprile 2019***

Lezione tenuta dalle 9.40 alle 11.00 per consentire la somministrazione del questionario sulla condizione abitativa degli studenti
Il gruppo diedrale D_n. Tavola di moltiplicazione del gruppo di D_4. Il gruppo D_4 come gruppo delle isometrie del quadrato, il gruppo delle isometrie del triangolo equilatero, del rettangolo e del rombo. Il gruppo D_n come sottogruppo del gruppo simmetrico S_n.
Esercizi sulle isometrie del piano e dello spazio e sui gruppi D_n.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***17 aprile 2019***

Sottogruppi di D_4. Rappresentazioni di D_4.
Il gruppo Q dei quaternioni. Tutti i sottogruppi di Q sono normali; Q é un gruppo di ordine 8 non abeliano, ma noné isomorfo a D_4. Un gruppo finito di ordine otto é isomorfo ad uno e uno solo dei seguenti gruppi: $Z_8, Z_4 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2, D_4, Q$.
Cenni sulla storia della teoria dei gruppi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***29 aprile 2019***

Elementi irriducibili ed elementi primi in un dominio. Ogni primo é irriducibile ma non vale il viceversa. In un dominio a ideali principali ogni irriducibile é primo. Domini euclidei (ED). Esempi: I domini $Z[\sqrt{d}]$ con $|d|2, d \neq 0, 1$ sono domini euclidei. Ogni dominio euclideo é un dominio a ideali principali (PID).

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***30 aprile 2019***

I domini $Z[i], Z[\sqrt{2}], Z[\sqrt{-2}]$ *sono domini euclidei; i domini* $Z[\sqrt{d}]$ *con* d *dispari* $d \leq -3$ *non sono domini euclidei.*
Divisibilitá nell'anello degli interi gaussiani. Se un elemento di $Z[i]$ *ha come norma un primo, allora é irriducibile.*
Un primo di Z *é irriducibile in* $Z[i]$ *se e solo se non é somma di quadrati in* Z*, se e solo é congruo a* -1 *modulo 4. Un primo di* Z *é irriducibile in* $Z[i]$ *se e solo se é congruo a* -1 *modulo 4. Per un primo* p *congruo a 1 modulo 4 esiste una e una sola coppia di interi positivi* $0 < b < a$ *tali che* $p = a^2 + b^2$.
Per ogni elemento irriducibile α *di* $Z[i]$ *esiste un unico primo di* Z *che é divisibile per* α *in* $Z[i]$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***2 maggio 2019***

Decomposizione in irriducibili di $Z[i]$. *Esempi. Un intero é somma di due quadrati se e solo se nella sua decomposizione in irriducibili ogni primo congruop a* -1 *modulo 4 compare con esponente pari. Esempi ed esercizi.*
Risultante di due polinomi in una variabile a coefficienti in un campo. Esempio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***6 maggio 2019***

$Ris(f, g)$ *si puó scrivere come combinazione dei polinomi* f *e* g. *Risultante di due polinomi in* n *variabili rispetto ad una delle variabili. Ricerca di eventuali componenti comuni d due curve piane.*
Rilevazione didattica
Correzione di vecchie prove d'esame.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***6 maggio 2019***

Seminario del prof. Marco Trozzo sul Laboratorio PLS - Gicare con i numeri.

Ore 2 (14.30-16.00) ***Firma (Marco Trozzo)***

Luogo (Aula) ***Aula Enriques***

Data ***7 maggio 2019***

Esercizi di riepilogo su tutti gli argomenti del corso.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***