Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 2018/19 - N2

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica con p autovalori positivi e q autovalori negativi, con $p \geq 1, q \geq 1, p+q=n$. Si provi che $X = \{x \in R^n \mid {}^t x A x = 1\}$ é diffeomorfa a $S^{p-1} \times R^q \subset R^n$.

2. Siano
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
siano $Q_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2,$ le quadriche di equazione
$$(x\, y\, z\, 1) A_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \; i = 1, 2.$$

   a) Si scriva la forma canonica affine di Q_1 e un'affinitá che porta Q_1 nella sua forma canonica affine.
   b) Si scriva le forma canonica euclidea di Q_2 e un'isometria che porta Q_2 nella sua forma canonica euclidea.
   c) Si stabilisca se Q_2 é una superficie di rotazione e se é una superficie rigata.
   d) Si stabilisca se esiste un diffeomorfismo tra Q_1 e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. Sia $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u, v, uv)$ una parametrizzazione del paraboloide iperbolico $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z = xy\}$ e sia $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ una curva di S.

   a) Si determini la lunghezza dell'arco di γ per $0 \leq t \leq 1$.
   b) Si determini l'angolo formato dalla curva γ con la curva $\alpha(t) = (-2t, t, -2t^2)$.
   c) Si calcoli l'area della regione
$$R = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S \mid u > 0,\; v > 0,\; u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

4. Sia $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ e sia $\alpha(t) = (t\cos t, t\,sen\, t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   a) Si calcoli la lunghezza di $\alpha(t)$.
   b) Si calcoli l'area della regione di S con $1 \leq z \leq 2$.
   c) Si stabilisca se le curve coordinate della parametrizzazione di S definita da $(x,y,z) = (ucosv, usenv, u)$ con $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, sono tra loro ortogonali in ogni punto.

5. Si calcoli la prima forma fondamentale del cono di vertice l'origine e che interseca il piano $z = 1$ nell'ellisse di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1 \end{cases}$.

6. Si determini la prima forma fondamentale della sfera unitaria di R^3 nella parametrizzazione ottenuta grazie alla proiezione stereografica dal polo nord.

7. Sia $\gamma : R \to R^3$ la parametrizzazione $\gamma(v) = (coshv, 0, v)$ e sia S la catenoide ottenuta facendo ruotare la catenaria intorno all'asse z.

   a) Si parametrizzi γ secondo la lunghezza d'arco.

   b) Si scriva una parametrizzazione σ della catenoide e se ne calcoli la prima forma fondamentale.

   c) Fissato $r \in R$, si consideri la curva $\alpha = \sigma(t, rt)$ e si calcoli la lunghezza di α tra $t = 0$ e t.

8. Sia $S \subset R^3$ una superficie regolare con parametrizzazione locale $\sigma(u, v)$ i cui coefficienti metrici soddisfino $E = G = 1$ e $F = 0$ in tutti i punti. Si mostri che le v-curve coordinate tagliano su ogni u-curva coordinata segmenti di uguale lunghezza.

9. Si determini la prima forma fondamentale del piano xy privato dell'origine, parametrizzato secondo le coordinate polari.

10. Siano
$$S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, 0 < z < 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2,\, z > 0\},$$
sia $h : (0, 1) \to R_{>0}$ un'applicazione differenziabile strettamente crescente, sia $\Phi : S_1 \to S_2$ l'applicazione definita da
$$\Phi(x, y, z) = h(z)(\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, 1).$$

   a) Provare che Φ é un'applicazione differenziabile.

   b) Si stabilisca se é possibile determinare h in modo che l'applicazione Φ trasformi i meridiani di S_1 in curve di lunghezza finita di S_2

   c) Si stabilisca se é possibile scegliere h in modo che Φ sia un'isometria locale.

11. Siano $\alpha, \beta : R \to R^3$ le traiettorie, parametrizzate secondo la lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:

   i) α parte da $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ e si muove lungo l'asse x nel verso positivo,

   ii) β parte da $\beta(0) = (0, a, 0)$ con $a \neq 0$ e si muove parallelamente al verso positivo dell'asse z.

   Si indichi con $S \subset R^3$ l'unione, al variare di $t \in R$, delle rette passanti per $\alpha(t)$ e $\beta(t)$.

   a) Si mostri che S é una superficie regolare.

   b) per ogni punto $P \in S$ si determini T_PS.

   c) Si dimostri che S é una superficie orientabile.