Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 2018/19 - N3

1. Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy^2\}$.

   a) Si scriva una parametrizzazione di S e si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S.

   b) Si dimostri che S ha curvatura gaussiana $K \leq 0$ e si determinino i punti in cui la curvatura gaussiana é nulla.

   c) Si dimostri che il punto $(0, 0, 0)$ é un punto planare di S.

   d) Si determinino le direzioni principali di S nei punti con curvatura gaussiana nulla.

   e) Si dimostri che le curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to S$ date da

   $$\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0, z_0 + ty_0^2), \quad \gamma_2(t) = (e^t x_0, e^{-2t} y_0, e^{-3t} z_0)$$

   sono linee asintotiche passanti per $(x_0, y_0, z_0) \in S$ per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

2. Sia S la superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ di parametrizzazione globale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

   a) Si determinino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale e la curvatura gaussiana di S.

   b) Sia $\gamma : (-1, 1) \to S$ una curva di S tale che $\gamma(0) = (0, 0, 0) \in S$. Si stabilisca quale puó essere la curvatura normale di γ nell'origine.

3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la metá superiore della pseudosfera ottenuta ruotando intorno all'asse z la metá superiore della trattrice data da

   $$\gamma(t) = (sen\, t, 0, cos\, t + log\, tan(\frac{t}{2})).$$

   In particolare S é il sostegno della superficie immersa $\sigma : (\frac{\pi}{2}, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

   $$\sigma(t, u) = (sent\, cos\, u, sent\, sen\, u, cos\, t + log\, tan(\frac{t}{2})).$$

   a) Si determini la mappa di Gauss $N : S \to S^2$ indotta da σ.

   b) Si determini il differenziale dN della mappa di Gauss e la curvatura Gaussiana di S.

   c) Si determini la curvatura media di S.

4. Sia S il paraboloide di rotazione

   $$S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = x^2 + y^2\}.$$

   a) Si calcoli la curvatura Gaussiana e la curvatura media di S in tutti i punti.

b) Si calcolino le direzioni principali di S nei punti del supporto della curva $\gamma(t) = (2cos\,t, 2sen\,t, 4)$.

c) Si calcoli la curvatura geodetica dei paralleli di S.

5. Siano X e Y due campi di vettori paralleli lungo una curva $\alpha : I \to S$. Allora $< X, Y >$ é costante. In particolare $|X|$ e $|Y|$ sono costanti e l'angolo fra $X(t)$ e $Y(t)$ é costante.

6. Sia T il toro generato dalla rotazione della circonferenza $(x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0$, con $0 < r < R$ intorno all'asse z. I paralleli generati dai punti $(R + r, 0), (R - r, 0), (R, r)$ sono detti parallelo massimo, minimo, superiore rispettivamente. Si stabilisca quali di questi paralleli é

   a) una geodetica,

   b) una linea di curvatura.

   c) Si calcoli la curvatura geodetica del parallelo superiore.

7. Sia S una superficie regolare, C una curva di S.

   a) Si provi che se C é sia una linea di curvatura sia una geodetica, allora C é una curva piana.

   b) Si provi che se una geodetica che non é una retta é una curva piana, allora é una linea di curvatura.

   c) Si dia un esempio di linea di curvatura che é una curva piana e non é una geodetica.

8. Si provi che una curva regolare $C \subset S$ é contemporaneamente una curva asintotica e una geodetica se e solo se é un segmento di retta.

9. Sia S la superficie di equazione $z = xy$. Si scrivano le equazioni di una geodetica per il punto $P = (1, 1, 1)$.

10. Si provi che se una superficie connessa orientabile ha solo punti ombelicali, allora la superficie é contenuta in un piano o in una sfera.

11. Si determinino i simboli di Christoffel del piano con le coordinate polari.

12. Si provi che l'applicazione $H \to H$ che a (u, v) associa $(-\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2})$ é un'isometria del semipiano iperbolico.