

Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 2019/20 - N 4

1. Siano X e Y due campi di vettori paralleli lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Allora $\langle X, Y \rangle$ é costante. In particolare $|X|$ e $|Y|$ sono costanti e l'angolo fra $X(t)$ e $Y(t)$ é costante.
2. Sia T il toro generato dalla rotazione della circonferenza $(x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0$, con $0 < r < R$ intorno all'asse z . I paralleli generati dai punti $(R + r, 0), (R - r, 0), (R, r)$ sono detti parallelo massimo, minimo, superiore rispettivamente. Si stabilisca quali di questi paralleli é
 - a) una geodetica,
 - b) una linea di curvatura.
 - c) Si calcoli la curvatura geodetica del parallelo superiore.
3. Sia S una superficie regolare, C una curva di S .
 - a) Si provi che se C é sia una linea di curvatura sia una geodetica, allora C é una curva piana.
 - b) Si provi che se una geodetica che non é una retta é una curva piana, allora é una linea di curvatura.
 - c) Si dia un esempio di linea di curvatura che é una curva piana e non é una geodetica.
4. Si provi che una curva regolare $C \subset S$ é contemporaneamente una curva asintotica e una geodetica se e solo se é un segmento di retta.
5. Sia S la superficie di equazione $z = xy$. Si scrivano le equazioni di una geodetica per il punto $P = (1, 1, 1)$.
6. Si determinino i simboli di Christoffel del piano con le coordinate polari.
7. Si provi che l'applicazione $H \rightarrow H$ che a (u, v) associa $(-\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2})$ é un'isometria del semipiano iperbolico.
8. Si provi che le geodetiche del semipiano iperbolico sono tutte e sole le rette verticali e le semicirconferenze con centro sull'asse delle ascisse.