Università degli Studi di Bologna **A.A. 2015/2016** **A**

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA II **Prova scritta** **11.1.2016**

Tutte le risposte debbono essere motivate

Esercizio 1.

Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata canonicamente alla matrice B, sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$

a) Si determinino il radicale di b, l'insieme $I(b)$ dei vettori di $\mathbb{R}^3$ isotropi rispetto a b, una base ortogonale di W rispetto a b e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a b.

b) Si stabilisca se la restrizione di b a $W \times W$ é un prodotto scalare su W.

Sia $Q \subset \mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione

$$(x\, y\, z\, 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

c) Si classifichi Q, se ne scriva la forma canonica affine e un'affinitá che porta Q nella sua forma canonica affine.

Si munisca Q della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$.

d) Si determini un intorno compatto del punto $(0, 1, 2) \in Q$.

e) Si stabilisca se esiste un omeomorfismo tra Q e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

f) Si determinino le componenti connesse di $Q \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$.

Esercizio 2.

Si consideri l'insieme $X = M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea di $\mathbb{R}^4$ e siano

$$X_1 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 1\},$$

$$X_2 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = c, \det A = -1\},$$

$$X_3 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1\}.$$

con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $M_2(\mathbb{R})$.

a) Si stabilisca se X_1 e X_2 sono varietá topologiche.

b) Si stabilisca se X_3 é connesso e compatto.

Esercizio 3.

Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , | \ y = \frac{1}{n}, \, n \in \mathbb{N}^*\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea e siano

$$Z_1 = \{(0, \frac{1}{n}) \in X \ , | \ n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$Z_2 = \{(x,y) \in X \mid -1 \leq x \leq 1, \, 0 < y < \frac{1}{2}\},$$

due suoi sottospazi.

Si consideri su X la seguente relazione di equivalenza:

$$(x,y)R(x',y') \text{ se e solo se } (x,y) = (x',y') \text{ oppure } x = x', \, yy' \in \mathbb{Q}$$

e siano $Y = X/R$ con la topologia quoziente della topologia euclidea e $p : X \to Y$ la proiezione canonica.

a) Si determinino l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato di Z_1, Z_2 in $\mathbb{R}^2$.

b) Si stabilisca se la proiezione p é aperta.

c) Si determini un omeomorfismo tra Y e uno spazio topologico metrizzabile.

Esercizio 4. Si dimostrino o si confutino le affermazioni seguenti.

a) Se X é una varietá topologica che ammette un atlante finito, allora X é connessa e compatta.

b) Sia f la mappa da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$ (dove $| \ |$ denota il valore assoluto). Se si munisce il dominio di f della topologia euclidea, allora la topologia piú fine sul codominio che rende continua la f é la topologia discreta.