Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2017/2018*

Scuola di *Scienze*

Corsi di Laurea o di Diploma *Triennale in Matematica (nuovo ordinamento)*

Insegnamento **Geometria I**

Docente titolare del corso **Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **Monica Idá**

Data inizio Lezioni *25 settembre 2017*

Data fine Lezioni *20 dicembre 2017*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***25 settembre 2017***

Obiettivi del corso, modalita' d'esame, informazioni varie.

Introduzione al corso: esempi di sistemi lineari e interpretazione geometrica della ricerca delle loro soluzioni.

Vettori applicati: direzione, verso, lunghezza. Unicita' del vettore applicato in un punto O di cui siano assegnati direzione, lunghezza e verso. Somma di vettori con lo stesso punto iniziale. Proprietá della somma: associativitá, commutativitá, esistenza e unicitá dell'opposto di ogni vettore non nullo. Disuguaglianza triangolare. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare e sue proprietá.

Sistemi di coordinate cartesiane sulla retta; coordinata cartesiana di un vettore della retta. Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) di una retta su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e i numeri reali.
Sistemi di coordinate cartesiane nel piano.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***26 settembre 2017***

Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) di un piano su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e le coppie ordinate di numeri reali.
Sistemi di coordinate cartesiane nello spazio; coordinate di un punto e componenti di un vettore applicato rispetto a un sistema di coordinate. Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) dello spazio su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e le terne ordinate di numeri reali.
Componenti di un vettore applicato in un sistema di riferimento. Somma di vettori in componenti. Prodotto di un vettore per uno scalare in componenti. Angolo di due vettori applicati. Prodotto scalare di due vettori.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***28 settembre 2017***

Significato geometrico del prodotto scalare di due vettori. Proprietá del prodotto scalare. Prodotto scalare di due vettori espressi mediante le loro componenti. Coseni direttori di un vettore applicato. Esempi.
Prodotto vettoriale di due vettori. Proprietá del prodotto vettoriale. La lunghezza del vettore prodotto vettoriale di due vettori dati é uguale all'area del parallelogramma individuato da due vettori. Componenti del prodotto vettoriale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***29 settembre 2017***

Prodotto misto di tre vettori, suo significato geometrico e sua espressione mediante le componenti dei vettori. Il prodotto misto di tre vettori é nullo se e solo se i tre vettori sono complanari.
Esercizi sui vettori applicati.
Equipollenza di segmenti orientati. Vettori liberi. Operazioni tra vettori liberi. Rappresentazione dei vettori liberi in coordinate.
Definizione di campo.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***2 ottobre 2017***

Spazio vettoriale su un campo K: definizione, esempi (K^n, vettori applicati) e prime proprietá. Combinazione lineare di n vettori. Vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti. I vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di esii é combinazione lineare degli altri.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***3 ottobre 2017***

I polinomi a coefficienti reali sono un R-spazio vettoriale (somma di due polinomi, moltiplicazione di un polinomio per uno scalare e loro proprietá).
Matrici a coefficienti in un campo: definizione, esempi. Somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare e loro proprietá. Matrice nulla. Lo spazio $M_{n,m}(K)$ é un K-spazio vettoriale. Trasposta di una matrice. Esempi. Prodotto riga per colonna di due matrici. Esempi

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***5 ottobre 2017***

Il prodotto tra matrici non é commutativo. Proprietá associativa del prodotto; distributivitá del prodotto rispetto alla somma (dimostrazione lasciata per esercizio).
Permutazioni dell'insieme $\{1, ..., n\}$. Composizione di permutazioni, permutazione inversa. Numero di inversioni di una permutazione, permutazioni pari e permutazioni dispari, segno di una permutazione. Esercizio assegnato: ogni trasposizione é una permutazione dispari. Segno di un prodotto di permutazioni, ogni permutazione e la sua inversa hanno lo stesso segno.
Definizione di determinante di una matrice quadrata. Calcolo del determinante di una matrice 2×2 e 3×3.
Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri il suo determinante é nullo.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***6 ottobre 2017***

Il determinante di una matrice quadrata é uguale al determinante della sua trasposta. (Solo enunciato)
Scambiando fra loro due righe (o due colonne) di una matrice il determinante cambia segno. (Solo enunciato)
Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) uguali é uguale a zero.
Moltiplicando una riga (o una colonna) per λ il determinante della matrice viene moltiplicato per λ.
Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) proporzionali é uguale a zero. Se $A^1, \ldots, A^s$ sono matrici $n \times n$ che hanno tutte le righe (colonne) uguali tranne la h-esima e C é la matrice $n \times n$ che ha tutte le righe (colonne) uguali a quelle di $A^1, \ldots, A^s$ tranne la h-esima, che é la somma delle righe (colonne) h-esime di $A_1, \cdots, A_s$, allora $\det C = \det A^1, \ldots, + \det A^s$.
Se B é la matrice $n \times n$ ottenuta sommando alla h-esima riga di una matrice A una combinazione lineare delle altre righe di A allora $\det B = \det A$. Esempi.
Complemento algebrico di un elemento di una matrice. Esempi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 ottobre 2017***

Se una colonna (o una riga) di una matrice é combinazione lineare delle altre colonne (delle altre righe), il determinante della matrice é zero.
Enunciato del Teorema di Laplace. Sviluppo di Laplace del determinante secondo una riga o una colonna. Esempio dello sviluppo di una matrice 3×3 secondo la prima riga e secondo la seconda colonna. Dimostrazione dela seconda parte del Teorema di Laplace. Esempio.
Matrice inversa di una matrice data, unicitá della inversa (quando esiste).
Una matrice é invertibile se e solo se il suo determinante é diverso da zero. Espressione degli elementi dell'inversa A^{-1} nei coefficienti della matrice A. Esercizi che utilizzano la matrice inversa.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***12 ottobre 2017***

Il determinante di una matrice le cui righe (colonne) sono linearmente dipendenti é zero. Determinante dell'inversa di una matrice invertibile A.
Rango di una matrice. Esempi.
Sottospazi di uno spazio vettoriale. I sottospazi vettoriali di R^2 sono $\{0\}, R^2$ e le rette per l'origine. I sottospazi vettoriali di R^3 sono $\{0\}, R^3$, le rette per l'origine e i piani per l'origine. L'insieme delle combinazioni lineari di n vettori $v_1 \cdots v_n$ di uno spazio vettoriale V costituiscono un sottospazio di V detto sottospazio generato da $v_1 \cdots v_n$. Sistemi di generatori per uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. Esempi. Lo spazio vettoriale $R[x]$ non é finitamente generato, ma i polinomi di grado ≤ 3 sono un sottospazio di $R[x]$ finitamente generato.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***16 ottobre 2017***

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite, matrice del sistema, matrice dei termini noti, matrice completa del sistema. Se $m = n$ e la matrice A del sistema ha determinante non nullo, allora il sistema $AX = B$ ha una e una sola soluzione. Regola di Cramer. Esempi.
Un sistema lineare di m equazioni in n incognite é risolubile se e solo se la colonna dei termini noti é combinazione lineare delle colonne della matrice A. Esempi.
Enunciato del teorema di Kroneker e dimostrazione della prima affermazione.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***19 ottobre 2017***

Dimostrazione deella seconda e della terza affermazione del teorema di Kronecker. Esempi di applicazioni del teorema di Kronecker.
Il rango di una matrice é il massimo numero delle colonne (e delle righe) linearmente indipendenti. Esempi ed esercizi sul rango delle matrici.
Enunciato del Teorema di Rouché-Capelli.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***23 ottobre 2017***

Dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli.
Sistemi equivalenti. Se in un sistema $AX = B$ il rango h della matrice A é uguale al rango della matrice completa e il minore costituito dalle prime h righe e h colonne é diverso da zero, allora il sistema é equivalente al sistema costituito solo dalle prime h equazioni. Metodo di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari. Esempi ed esercizi.
Sistemi lineari omogenei. Un sistema lineare omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; il sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se il numero delle incognite é strettamente maggiore del rango della matrice dei coefficienti.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***24 ottobre 2017***

Lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite é un sottospazio vettoriale di K^n. Esempio in cui si é determinato un insieme di generatori del sottospazio delle soluzioni.
Sommando ad una riga (risp. colonna) di una matrice una combinazione lineare delle altre righe (risp. colonne) non si altera il rango di una matrice. Esempi.
Lezione interrotta alle 12.40 per le prove di evacuazione.

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***30 ottobre 2017***

Matrici ridotte per righe. Se una matrice é ridotta per righe il suo rango é uguale al numero delle righe non nulle. Riduzione di una matrice per righe. Esempi.
Metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari trasformandolo in uno equivalente in cui la matrice dei coefficienti é ridotta per righe. Metodo di eliminazione di Gauss. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***2 novembre 2017***

Caratterizzazione dei sistemi liberi di vettori di un K-spazio vettoriale. Base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi di uno spazio vettoriale: basi standard per K^n, per lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K, per lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficienti in K di grado minore o uguale a n, esempi di basi di sottospazi vettoriali di R^3.
Il sottospazio vettoriale generato da un insieme finito di vettori $v_1, \cdots, v_n$ di uno spazio vettoriale V coincide con il sottospazio generato dal'insieme di vettori $v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_s$ con $w_1, \cdots, w_s$ combinazioni lineari di $v_1, \cdots, v_n$.
Metodo degli scarti successivi per la determinazione di una base a partire da un insieme di generatori di uno spazio vettoriale. Esempi.
Completamento di un sistema libero ad una base in uno spazio vettoriale finitamente generato. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***3 novembre 2017***

Un insieme finito di vettori $v_1, \cdots, v_n$ di un K-spazio vettoriale V é una base se e solo se ogni vettore $v \in V$ si puó scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$. Componenti di un vettore rispetto a una base. Esempi.
Dimostrazione di quattro lemmi che verranno utilizzati per provare che il numero degli elementi di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato non dipende dalla scelta della base. In particolare il Lemma 4 afferma che: se $e_1, \cdots, e_n$ e $v_1, \cdots, v_m$ sono rispettivamente una base e un sistema libero di un K-spazio vettoriale V, allora $m \leq n$.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 novembre 2017***

Il numero degli elementi di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato non dipende dalla scelta della base ed é detto dimensione dello spazio vettoriale. Esempi (dimensione degli spazi vettoriali $M_{m,n}(R)$, dei polinomi di grado $\leq m$ a coefficienti reali, di sottospazi di R^3).
Se V é uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $W \subset V$ é un sottospazio vettoriale, allora W ha dimensione finita $m \leq n$ e se $\dim_K W = n$ allora $W = V$.
Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \cdots, v_n$ elementi di V. Allora $v_1, \cdots, v_n$ é una base di V se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema libero di V , se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema di generatori di V.
Ricerca di una base per il sottospazio di K^n costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite in cui la matrice dei coefficienti del sistema ha rango r.
Sottospazio somma di due sottospazi. Il sottospazio somma di due sottospazi é il piu' piccolo sottospazio contene i due sottospazi. Somma diretta di sottospazi. La somma di due sottospazi é una somma diretta se e solo se l'intersezione dei due sottospazi é costituita dal solo vettore nullo. Esempi di somme e di somme dirette.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***10 novembre 2017***

Sia V uno spazio vettoriale e siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V. Allora $\dim_K(V_1 + \cdots V_n) \leq \dim_K V_1 + \cdots + \dim_K V_n$. Esempio.
Sia V uno spazio vettoriale, siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V e siano $B_1, \cdots, B_n$ una base per ciascuno di tali sottospazi. Allora la somma $V_1 + \cdots + V_n$ é diretta se e solo se $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ é una base di V, se e solo se $\dim_K V_1 + \cdots + dim_K V_n = \dim_K(V_1 + \cdots + V_n)$. Esempi di basi di un sottospazio vettoriale, di basi di una somma e di un'intersezione di sottospazi.
Esercizi. (A causa dello sciopero dei treni gli studenti presenti erano meno numerosi del solito e si é preferito dedicare la seconda ora prevalentemente allo svolgimento di esercizi.)

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 novembre 2017***

Formula di Grassmann per spazi vettoriali. Esempi ed esercizi di applicazioni di tale formula.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***14 novembre 2017***

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali: definizione ed esempi.
Esempi di applicazioni lineari, applicazioni lineari da K^n *a* K^m*.*

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***23 novembre 2017***

Esempi di applicazioni lineari.
Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Esempi. Il nucleo di un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ *é un sottospazio vettoriale di* V*, l'immagine é un sottospazio vettoriale di* W*. Un'applicazione lineare é iniettiva se e solo se il suo nucleo é costituito dal solo vettore nullo. Isomorfismi di spazi vettoriali. La composizione di applicazioni lineari é un'applicazione lineare. Isomorfismi. L'insieme* $Hom(V, W) = L(V, W)$ *di tutte le applicazioni* K*-lineari da* V *a* W *puo' essere munito di una struttura di* K*-spazio vettoriale. Spazio vettoriale duale di uno spazio vettoriale* V*.*
Un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ *é nota se si conoscono le immagini dei vettori di una base di* V*. Esiste ed é unica l'applicazione lineare da* V *a* W *che fa corrispondere ordinatamente ai vettori* $v_1, \cdots v_n$ *di una base di* V n *vettori fissati* $w_1, \cdots, w_n$ *di* W*. Esempio.*

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 novembre 2017***

Esempio di applicazione lineare assegnata da R^3 *a* R^3 *assegnata mediante l'immagine dei vettori di una base.*
L'immagine di un sottospazio di V *in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di* W*, la controimmagine di un sottospazio di* W *in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di* V*. Esempio.*
In ogni spazio vettoriale V *di dimensione finita in cui si fissa una base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *si puó stabilire un isomorfismo tra* V *e* K^n*. Esempi.*
Per ogni applicazione lineare ϕ *da* V *e* W*, dove* V *é uno spazio vettoriale finitamente generato, la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine di* ϕ *é uguale alla dimensione di* V*.*
Restrizione di un'applicazione lineare a un sottospazio del dominio. Se V' *ún sottospazio di* V *ed é definita un'applicazione lineare da* V' *a* W*, allora esiste un'applicazione lineare da* V *a* W *che ristretta a* V' *coincide con* f*.*

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***30 novembre 2017***

Soluzione di un problema assegnato nella lezione precedente: Trovare le condizioni affinché esista e sia univocamente determinata) un'applicazione lineare che estende due applicazioni lineari definite su sottospazi di uno spazio vettoriale V*.*
L'immagine di un sottospazio V' *del dominio* V *mediante un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale del codominio di dimensione minore o uguale alla dimensione di* V'*.*
Un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali della stessa dimensione é un isomorfismo se e solo se é un'applicazione iniettiva, se e solo se é un'applicazione suriettiva.
Ad ogni matrice $m \times n$ *a coefficienti in un campo* K *puó essere associata un'applicazione lineare da* K^n *a* K^m*. Isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle matrici* $m \times n$ *a coefficienti in un campo* K *e lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da* K^n *a* K^m *in cui sono state fissate le rispettive basi canoniche. Esempi. Per un'applicazione lineare* f *da* K^n *a* K^m *allora* $dim_K Imf$ *é uguale al rango della matrice canonicamente associata a* f*. Un'applicazione da* K^n *a* K^n *é un isomorfismo se e solo se il rango della matrice canonicamente associata é* n*.*

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***4 dicembre 2017***

Discussione di un esercizio assegnato la lezione precedente. Matrice $M_{F,E}(\phi)$ associata ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ rispetto ad una base E di V e una base F di W. Esempi di matrici associate ad applicazioni lineari rispetto a basi fissate. Espressione dell'applicazione nelle coordinate rispetto alle basi fissate. Isomorfismo lineare tra $L(V, W)$ e lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici m per n (fissate una base E di V e una base F di W). Esempi. Fissata una base per ciascuno degli spazi vettoriali V, W, Z, alla composizione delle applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi : W \to Z$ corrisponde il prodotto delle matrici associate a ϕ e ψ. Matrice associata a id_V rispetto a due basi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***7 dicembre 2017***

Matrice del cambio di base in un K-spazio vettoriale V e sue proprietá. Esempi. Matrice di passaggio e componenti di uno stesso vettore nelle due basi. Esempi. Matrice associata a id_V rispetto alle due basi.
Matrici associate ad una stessa applicazione lineare $\phi : V \to W$ rispetto a due diverse coppie di basi: teorema del cambio di base. Esempi. Matrici associate ad uno stesso endomorfismo di V rispetto a basi diverse.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 dicembre 2017***

Correzione due esercizi assegnati nella lezione precedente.
Rilevazione della didattica

Ore 1 (12-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***12 dicembre 2017***

Matrici simili. La relazione di similitudine é una relazione di equivalenza su $M_n(K)$. Matrici simili hanno lo stesso determinante e la stessa traccia. Due matrici simili possono essere viste come matrici associate ad uno stesso endomorfismo di V rispetto a basi diverse. Matrici simili hanno lo stesso rango.
Autovalore di un endomorfismo. Autovettori relativi ad un autovalore. Autospazi. Esempi di autovalori e relativi autospazi.
Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sono autovalori a due a due distinti di un endomorfismo $\phi : V \to V$ e per ogni $i = 1, \cdots, n$, indichiamo con v_i un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ_i, allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é un sistema libero di vettori di V. Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita ha al piú n autovalori distinti; se ha esattamente n autovalori distinti, allora esiste una base di V costituita da autovettori di f e la matrice associata a f rispetto a tale base é una matrice diagonale, che sulla diagonale principale ha gli autovalori di f.
Esempi di ricerca degli autovalori di un endomorfismo di R^2.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 dicembre 2017***

Se $\phi : K^n \to K^n$ é un endomorfismo lineare, A é la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di K^n, allora $\lambda \in K$ é un autovalore di ϕ se e solo se il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$ ha soluzioni non banali, se e solo se $det(A - \lambda I) = 0$.
Polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_n(K)$. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, pertanto si puó definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo ϕ di K^n. Polinomio caratteristico di un endomorfismo ϕ di un K-spazio vettoriale V di dimensione n. Gli autovalori di ϕ sono radici del polinomio caratteristico di ϕ. Esempi. Radice di un polinomio a coefficienti in un campo K. Molteplicitá di una radice di un polinomio. Ricerca degli autovalori di un endomorfismo. Determinazione degli autospazi di un endomorfismo.
Se $\phi : V \to V$ é un endomorfismo di V, con $dim_K V = n$, e λ é un autovalore di ϕ, allora la dimensione dell'autospazio V_λ é minore o uguale alla molteplicitá di λ come radice del polinomio caratteristico di ϕ. Esempio in cui la molteplicitá algebrica di un autovalore é strettamente maggiore della dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore. Molteplicitá geometrica di un autovalore.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 dicembre 2017***

Endomorfismi diagonalizzabili (o semplici). Se K é un sottocampo del campo complesso, $dim_K V = n$, $\phi : V \to V$ é un endomorfismo di V, allora ϕ é semplice se e solo se V é somma diretta degli autospazi di ϕ, se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico di ϕ stanno in K e le loro molteplicitá algebrica e geometrica coincidono.
Matrici diagonalizzabili. Se $A \in M_n(K)$ e $f : K^n \to K^n$ é l'endomorfismo associato canonicamente ad A, allora A é diagonalizzabile se e solo se f é un endomorfismo diagonalizzabile.
Esempi di endomorfismi diagonalizzabili, determinazione di una base di V costituita da autovettori di ϕ. Osservazioni riguardanti autovalori, autospazi, diagonalizzabiliá: la matrice associata a un endomorfismo rispetto a una base di autovettori é una matrice diagonale, che ha sulla diagonale gli autovalori dell'endomorfismo ripetuti tante volte quanto é la loro molteplicitá.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***