Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2012/2013*

Facoltà *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma *Triennale in Matematica (nuovo ordinamento)*

Insegnamento **Geometria I**

Docente titolare del corso **Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **Davide Aliffi**

Data inizio Lezioni *25 settembre 2012*

Data fine Lezioni *23 maggio 2013*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***25 settembre 2012***

Introduzione al corso: esempi di sistemi lineari e interpretazione geometrica della ricerca delle loro soluzioni. Obiettivi del corso, modalita' d'esame, ricevimento studenti, informazioni varie.
Applicazioni tra insiemi, applicazioni iniettive, applicazioni suriettive, applicazioni biunivoche. Applicazioni iniettive, suriettive, biunivoche tra insiemi finiti e numero degli elementi di tali insiemi. Controimmagine mediante un'applicazione di un sottoinsieme del codominio.
Composizione di applicazioni, inversa di un'applicazione biunivoca.
Permutazioni di un insieme. Permutazioni dell'insieme $\{1, ..., n\}$

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***26 settembre 2012***

Correzione di esercizi assegnati nella lezione precedente, esercizi su applicazioni iniettive e suriettive.
Composizione di permutazioni, permutazione inversa. Numero di inversioni di una permutazione, permutazioni pari e permutazioni dispari, segno di una permutazione. Calcolo del segno di tutte le permutazioni su tre lettere.
Trasposizioni. Le trasposizioni sono permutazioni dispari. Segno di un prodotto di permutazioni, ogni permutazione e la sua inversa hanno lo stesso segno.
Matrici a coefficienti reali o complessi. Determinante di una matrice quadrata. Calcolo del determinante di una matrice 2×2 e 3×3.
Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri il suo determinante é nullo.
Trasposta di una matrice. Il determinante di una matrice quadrata é uguale al determinante della sua trasposta.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 settembre 2012***

Scambiando fra loro due righe (o due colonne) di una matrice il determinante cambia segno. Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) uguali é uguale a zero. Moltiplicando una riga (o una colonna) per λ *il determinante della matrice viene moltiplicato per* λ.
Elementi di R^n*, somma di elementi di* R^n*, moltiplicazione di elementi (vettori) di* R^n *per uno scalare, combinazione lineare di vettori.*
Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) proporzionali é uguale a zero. Se $A^1, \dots, A^s$ *sono matrici* $n \times n$ *che hanno tutte le righe uguali tranne la* h*-esima e* C *é la matrice* $n \times n$ *che ha tutte le righe uguali a quelle di* $A^1, \dots, A^s$ *tranne la* h*-esima, che é la somma delle righe* h*-esime di* A *e di* B*, allora* $\det C = \det A^1, \dots, + \det A^s$*. Se* B *é la matrice* $n \times n$ *ottenuta sommando alla* h*-esima riga di una matrice* A *la* k*-esima riga della stessa matrice* A *(con* $h \neq k$*), allora* $\det B = \det A$*. Se* B *é la matrice* $n \times n$ *ottenuta sommando alla* h*-esima riga di una matrice* A *una combinazione lineare delle altre righe di* A *allora* $\det B = \det A$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***2 ottobre 2012***

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori di $\mathcal{R}^n$*. Esempi. I vettori* $v_1, \dots, v_s$ *sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi é combinazione lineare degli altri. Se le colonne (o le righe) di una matrice sono vettori linearmente dipendenti il determinante della matrice é zero.*

Complemento algebrico di un elemento di una matrice. Teorema di Laplace. Sviluppo di Laplace del determinante secondo una riga o una colonna.Teorema di Laplace. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***3 ottobre 2012***

Secondo teorema di Laplace.
Somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare; proprietá di somma e prodotto per scalari.
Prodotto riga per colonna di matrici. Il prodotto tra matrici non é commutativo. Proprietá associativa del prodotto, distributivitá del prodotto rispetto alla somma. Teorema di Binet.
Matrice identica. Matrice inversa di una matrice data, unicitá della inversa (quando esiste). Se una matrice é invertibile il suo determinante é diverso da zero.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 ottobre 2012***

Una matrice é invertibile se e solo se il suo determinante e' diverso da zero. Espressione degli elementi dell'inversa A^{-1} *nei coefficienti della matrice* A*. Esempi.*
Esercizi sulle matrici.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***10 ottobre 2012***

Sistemi lineari di m *equazioni in* n *incognite, matrice del sistema, matrice dei termini noti, matrice completa del sistema. Se* $m = n$ *e la matrice* A *del sistema ha determinante non nullo, allora il sistema* $AX = B$ *ha una e una sola soluzione. Regola di Cramer. Esempi.*
Un sistema lineare di m *equazioni in* n *incognite é risolubile se e solo se la colonna dei termini noti é combinazione lineare delle colonne della matrice* A*.*
Caratteristica (rango) di una matrice. Esempi.
Teorema di Kroneker (enunciato).
Se $v_1, \dots, v_s$ *sono vettori di* $\mathcal{R}^m$ *linearmente indipendenti e* $w_1, \dots, w_s$ *sono vettori di* $\mathcal{R}^n, n \geq m$ *tali che per ogni* $i = 1, \dots, m$ *le prime* m *componenti di* w_i *sono esattamente le componenti di* v_i*, allora* $w_1, \dots, w_s$ *sono linearmente indipendenti.*
Dimostrazione della prima affermazione del terema di Kroneker.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 ottobre 2012***

Dimostrazione del Teorema di Kronecker. Esempi.
Il rango di una matrice é il massimo numero delle colonne (e delle righe) linearmente indipendenti. Esempi ed esercizi sul rango delle matrici.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***16 ottobre 2012***

Teorema di Rouché-Capelli. Metodo di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari. Esempi ed esercizi.
Sistemi lineari omogenei. Un sistema lineare omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; il sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se il numero delle incognite é strettamente maggiore del rango della matrice dei coefficienti.
Sommando ad una riga una combinazione lineare delle altre righe non si altera il rango di una matrice.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***17 ottobre 2012***

Lezione non effettuata per consentire agli studenti la partecipazione ad AlmaFest.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 ottobre 2012***

Matrici ridotte per righe e loro rango. Esempi ed esercizi.
Sistemi lineari equivalenti. Sommando a una equazione di un sistema lineare una combinazione lineare delle altre equazioni si ottiene un sistema equivalente. Esempi ed esercizi.
Metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari trasformandolo in uno equivalente in cui la matrice dei coefficienti é ridotta per righe. Metodo di Gauss.
Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***22 ottobre 2012***

Esercizi su sistemi lineari e matrici. Correzione del test di autovalutazione dello scorso anno.
Vettori applicati: direzione, verso, lunghezza. Unicita' del vettore applicato in un punto O di cui siano assegnati direzione, lunghezza e verso.
Somma di vettori con lo stesso punto iniziale. Proprietá della somma: associativitá, commutativitá, esistenza e unicitá dell'opposto di ogni vettore non nullo.
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare e sue proprietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***23 ottobre 2012***

Disuguaglianza triangolare.
Sistemi di coordinate cartesiane sulla retta; coordinata cartesiana di un vettore della retta. Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) di una retta su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e i numeri reali.
Sistemi di coordinate cartesiane nel piano; coordinate di un punto e componenti di un vettore applicato rispetto a un sistema di coordinate. Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) di un piano su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e le coppie ordinate di numeri reali.
Sistemi di coordinate cartesiane nello spazio; coordinate di un punto e componenti di un vettore applicato rispetto a un sistema di coordinate. Corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati (i punti) dello spazio su cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane e le terne ordinate di numeri reali.
Componenti di un vettore applicato in un sistema di riferimento. Somma di vettori in componenti. Prodotto di un vettore per uno scalare in componenti. Angolo di due vettori applicati. Prodotto scalare di due vettori, suo significato geometrico.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***24 ottobre 2012***

Proprietá del prodotto scalare di due vettori. Prodotto scalare di due vettori espressi mediante le loro componenti. Coseni direttori di un vettore applicato. Esempi. Prodotto vettoriale di due vettori e sue proprietá. La lunghezza del vettore prodotto vettoriale di due vettori dati é uguale all'area del parallelogramma individuato da due vettori. Componenti del prodotto vettoriale.
Prodotto misto di tre vettori, suo significato geometrico e sua espressione mediante le componenti dei vettori. Il prodotto misto di tre vettori é nullo se e solo se i tre vettori sono complanari, se e solo se sono linearmente dipendenti.
Esercizi sui vettori applicati.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***25 ottobre 2012***

Richiami su. postulato del trasporto, lunghezza di un segmento rispetto a un'unitá di misura.
Vettori liberi. Operazioni tra vettori liberi: somma di vettori liberi, prodotto di un vettore libero per uno scalare; prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto di vettori liberi. Rappresentazione dei vettori liberi in coordinate.
Cambiamenti di riferimento: traslazioni, rotazioni, rototraslazioni; legame tra le coordinate nei due sistemi di riferimento.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***30 ottobre 2012***

Equazione della retta nel piano. Rette ortogonali, rette parallele, rette coincidenti. Equazione della retta per due punti. Intersezione di rette. Angolo di due rette del piano. Rette per il punto di intersezione di due rette. Fascio di rette per un punto del piano.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***31 ottobre 2012***

Fasci di rette parallele. Esercizi che utilizzano i fasci di rette. Retta per un punto e parallela a un vettore dato. Equazioni parametriche della retta nel piano. Retta per due punti in forma parametrica. Intersezione di rette date in forma parametrica. Esercizi.
Correzione di esercizi sui sistemi lineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***7 novembre 2012***

Ore 14-16 test di autovalutazione; ore 16-18 correzione del test.

Ore 4 (14-18) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***8 novembre 2012***

Distanza di un punto del piano da una retta del piano.
Retta dello spazio per un punto e parallela a un vettore dato; equazioni parametriche della retta; retta per due punti.
Piano per un punto e ortogonale a un vettore dato. Ogni piano dello spazio é rappresentato da un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ *con* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*. Esempi.*
Condizione di allineamento di tre punti dello spazio. Esempi. Piano individuato da tre punti non allineati: vettore ortogonale a tale piano, equazione cartesiana. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 novembre 2012***

Equazioni parametriche del piano; condizioni imposte sui coefficienti del piano dal passaggio per tre punti.
Intersezioni di rette e piani dello spazio. Fasci di piani. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***14 novembre 2012***

Rette complanari e rette sghembe. Esempi. Retta che interseca ortogonalmente due rette sghembe.
Esercizi su rette e piani dello spazio.
Distanza di un punto da un piano.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 novembre 2012***

Distanza di due piani paralleli, distanza di un punto da una retta; esempi. Distanza di due rette parallele e di due rette sghembe; esempi.
Esercizi su rette e piani dello spazio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***20 novembre 2012***

Correzione della prova di autovalutazione di Geometria I del 23.11.2011 (esercizi su rette e paini dello spazio).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***21 novembre 2012***

Spazi vettoriali su un campo K: definizioni ed esempi (K^n, vettori applicati, vettori liberi, matrici).
Sottospazi di uno spazio vettoriale. I sottospazi vettoriali di R^2 sono $\{0\}, R^2$ e le rette per l'origine; i sottospazi vettoriali di R^3 sono $\{0\}, R^3$, le rette per l'origine e i piani per l'origine. Sottospazio generato da un insieme finito di vettori. L'intersezione di sottospazi é un sottospazio, l'unione insiemistica di sottospazi non é' un sottospazio. Sottospazio somma di due sottospazi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***22 novembre 2012***

Il sottospazio somma di due sottospazi é il piu' piccoo sottospazio contenente entrambi i sottospazi. Esempi.
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non é un sottospazio vettoriale di R^n, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo é un sottospazio vettoriale di R^n.
Sottospazio generato da un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V e sue proprietá. Esempi. Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale. Esempi. Spazi vettoriali finitamente generati.
Sistemi liberi di vettori di uno spazio vettoriale. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 novembre 2012***

Base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi. Basi standard per K^n, per lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K, per lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficienti in K.
Caratterizzazione dei sistemi liberi di vettori. Metodo degli scarti successivi per la determinazione di una base a partire da un insieme di generatori. Esempi. Completamento di un sistema libero ad una base in uno spazio vettoriale finitamente generato.
Un insieme finito di vettori $v_1, \cdots, v_n$ di un K-spazio vettoriale V é una base se e solo se ogni vettore $v \in V$ si puó scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***28 novembre 2012***

Il numero degli elementi di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato non dipende dalla scelta della base ed é detto dimensione dello spazio vettoriale. Se V é uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $W \subset V$ é un sottospazio vettoriale, allora W ha dimensione finita $m \leq n$ e se $\dim_K W = n$ allora $W = V$. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \cdots, v_n$ elementi di V. Allora $v_1, \cdots, v_n$ é una base di V se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema libero di V , se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema di generatori di V. Esempi ed esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***29 novembre 2012***

Esercizi su sistemi di generatori, sistemi liberi, basi di uno spazio vettoriale.
Somma diretta di sottospazi. La somma di due sottospazi é una somma diretta se e solo se l'intersezione dei due sottospazi é costituita dal solo vettore nullo.
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V. Allora $\dim_K(V_1 + \cdots V_n) \leq \dim_K V_1 + \cdots + \dim_K V_n$. Esempio. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V e siano $B_1, \cdots, B_n$ una base per ciascuno di tali sottospazi. Allora la somma $V_1 + \cdots + V_n$ é diretta se e solo se $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ é una base di V, se e solo se $\dim_K V_1 + \cdots + dim_K V_n = \dim_K(V_1 + \cdots + V_n)$.
Esercizi su somme e somme dirette di sottospazi e loro basi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***4 dicembre 2012***

Corollari e osservazioni sui risultati provati nella lezione precedente.
Formula di Grassmann per spazi vettoriali. Esempi.
Esercizi sui sottospazi e sulle somme di sottospazi.
L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n-r$, dove r é il rango della matrice dei coefficienti del sistema. Basi di tale sottospazio vettoriale di K^n.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***6 dicembre 2012***

Esercizi sulla formula di Grassmann, sottospazi, basi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 dicembre 2012***

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali: definizione ed esempi.
Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Il nucleo di un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ é un sottospazio vettoriale di V, l'immagine é un sottospazio vettoriale di W. l'immagine di un sottospazio di V in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di W, la controimmagine di un sottospazio di W in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di V La composizione di applicazioni lineari é un'applicazione lineare. Isomorfismi. L'insieme $L(V,W)$ di tutte le applicazioni K-lineari da V a W puo' essere munito di una struttura di K-spazio vettoriale. Spazio vettoriale duale di uno spazio vettoriale V. Ad ogni matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo K puó essere associata un'applicazione lineare da K^n a K^m.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***12 dicembre 2012***

Isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in un campo K e lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da K^n a K^m in cui sono state fissate le rispettive basi canoniche. Esempi.
Un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ é nota se si conoscono le immagini dei vettori di una base di V. Esiste ed é unica l'applicazione lineare da V a W che fa corrispondere ordinatamente ai vettori $v_1, \cdots v_n$ di una base di V n vettori fissati $w_1, \cdots, w_n$ di W. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 dicembre 2012***

In ogni spazio vettoriale V *di dimensione finita in cui si fissa una base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *si puó stabilire un isomorfismo tra* V e K^n.
Esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 dicembre 2012***

Ricevimento studenti collettivo: risoluzione di esercizi a richiesta su sottospazi vettoriali e loro basi.
Esercizi sulle applicazioni lineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***19 dicembre 2012***

Ricevimento studenti collettivo: svolgimento di esercizi di vecchie prove di esame su sottospazi vettoriali e applicazioni lineari su richiesta degli studenti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***19 febbraio 2013***

Esercizi di ripasso sulla prima parte del corso: matrici, sistemi lineari, spazi vettoriali, applicazioni lineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***20 febbraio 2013***

Matrice $M_{E,F}(\phi)$ associata ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ rispetto ad una base E di V e una base F di W. Esempi di matrici associate ad applicazioni lieari rispetto a basi fissate. Espressione dell'applicazione nelle coordinate rispetto alle basi fissate. Isomorfismo lineare tra $L(V,W)$ e lo spazio $K^{m,n}$ delle matrici m per n (fissate una base E di V e una base F di W). Esempi.
Matrice del cambio di base in un K-spazio vettoriale e sue proprietá. Esempi. Matrice di passaggio e componenti di uno stesso vettore nelle due basi. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***21 febbraio 2013***

Teorema del cambio di base e alcuni suoi corollari. Esempi. Matrici simili. Due matrici simili hanno lo stesso rango, la stessa traccia e lo stesso determinante. Traccia e determinante di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita.
Esempio di come si possano scegliere le basi in V e W affinche' la matrice associata ad un'applicazione $\phi : V \to W$ tale che $\dim Im\phi = r$ rispetto a tali basi sia la piu' semplice possibile. Interpretazione matriciale del risultato.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***26 febbraio 2013***

Esercizi su come si possano scegliere le basi in V e W affinche' la matrice associata ad un'applicazione $\phi : V \to W$ con date proprietá rispetto a tali basi sia la piu' semplice possibile.
Calcolo della dimensione di spazi di endomorfismi lineari.
Correzione di prove d'esame su spazi di applicazioni lineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 febbraio 2013***

Autovalore di un endomorfismo. Autovettori relativi ad un autovalore. Autospazi. Esempi di autovalori e relativi autospazi.
Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sono autovalori a due a due distinti di un endomorfismo $\phi : V \to V$ e per ogni $i = 1, \cdots, n$, indichiamo con v_i un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ_i, allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é un sistema libero di vettori di V.
Lo spazio vettoriale somma degli autospazi di un endomorfismo é una somma diretta. Se $dim_K V = n$, ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ ha al piú n autovalori distinti. Se $dim_K V = n$ e l'endomorfismo $\phi : V \to V$ ha n autovalori distinti, allora V ammette una base costituita da autovalori di ϕ.
Se $dim_K V = n$, $\phi : V \to V$ é un endomorfismo lineare, E é una base di V e A é la matrice associata a ϕ rispetto alla base E, allora $\lambda \in K$ é un autovalore di ϕ se e solo se il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$ ha soluzioni non banali, se e solo se $det(A - \lambda I) = 0$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***28 febbraio 2013***

Autovalori come radici del polinomio caratteristico. Coefficienti del polinomio caratteristico. Esempi. Se $\phi : V \to V$ é un endomorfismo di V, con $dim_K V = n$, e λ é un autovalore di ϕ, allora la dimensione dell'autospazio V_λ é minore o uguale alla molteplicitá di λ come radice del polinomio caratteristico di ϕ. Esempio in cui la molteplicitá algebrica di un autovalore e' strettamente maggiore della dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore. Molteplicitá geometrica di un autovalore.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***4 marzo 2013***

Endomorfismi semplici. Se K é un sottocampo del campo complesso, $dim_K V = n$, $\phi : V \to V$ é un endomorfismo di V, allora ϕ é semplice se e solo se V é somma diretta degli autospazi di ϕ, se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico di ϕ stanno in K e le loro molteplicitá algebrica e geometrica coincidono. Esempi di endomorfismi semplici, determinazione di una base di V costituita da autovettori di ϕ. La matrice associata a un endomorfismo rispetto a una base di autovettori é una matrice diagonale, che ha sulla diagonale gli autovalori dell'endomorfismo ripetuti tante volte quanto é la loro molteplicitá. Matrici diagonalizzabili. Se $A \in K^{n,n}$ e $f : K^n \to K^n$ é l'endomorfismo associato canonicamente ad A, allora A é diagonalizzabile se e solo se f é un endomorfismo semplice.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***6 marzo 2013***

Esercizi su matrici associate ad applicazioni lineari rispetto a basi scelte opportunamente, su autovalori, autovettori, diagonalizzabilitá. Le potenze di un endomorfismo semplice sono endomorfismi semplici.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***7 marzo 2013***

Esercizi su autovettori di un isomorfismo e del suo inverso, su matrici simili, polinomio caratteristico di matrici triangolari e di matrici a blocchi. Base duale della base di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Isomorfismo canonico tra uno spazio vettoriale V di dimensione finita e il suo biduale. Applicazione trasposta di un'applicazione lineare.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***12 marzo 2013***

Se A é la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto ad una coppia di basi B e D, la matrice associata all'applicazione trasposta rispetto alle basi duali $D*$ e B é la trasposta di A. Un endomorfismo é digonalizzabile se e solo se lo é il suo trasposto.
Polinomio di un endomorfismo. Fissato un endomorfismo f di V, l'applicazione da $K[x]$ a $End(V)$ che ad ogni polinomio p associa l'endomorfismo $p(f)$ é un omomorfismo di anelli suriettivo. Polinomio minimo di un endomorfismo. Teorema di Cayley-Hamilton (enunciato) ed esempi di sua applicazione. Esempi. Esercizi sulla diagonalizzabilitá di un endomorfismo che é radice di un dato polinomio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 marzo 2013***

Condizione sufficiente per la diagonalizzabilitá di un endomorfismo che é radice di un polinomio di cui si conosce la decomposizione in irriducibili.
Sottospazi invarianti rispetto ad un endomorfismo. Esempi ed esercizi.
Matrici nilpotenti e loro autovalori. Caratterizzazione delle matrici nilpotenti nel caso di un campo algebricamente chiuso.
Problema della riduzione di una matrice a forma canonica. Blocco di Jordan di ordine n, forma canonica di Jordan.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***14 marzo 2013***

Enunciato del teorema di Jordan: ogni matrice quadrata A di ordine n a coefficienti in un campo K, tale che tutte le radici del suo polinomio caratteristico siano in K é simile ad una matrice in forma canonica di Jordan e tale forma canonica é unica a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan di cui é composta. Strategia della dimostrazione del teorema di Jordan: separazione degli autovalori, riduzione al caso nilpotente, dimostrazione del teorema nel caso di matrici nilpotenti.
Dimostrazione di alcuni lemmi relativi al passo di separazione degli autovalori. Decomposizione di Fitting. Autospazi generalizzati. Teorema di decomposizione in autospazi generalizzati dell'endomorfismo. Esempi. Riduzione al caso nilpotente. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 marzo 2013***

Determinazione di una base rispetto alla quale la matrice di un endomorfismo nilpotente é in forma canonica di Jordan. Esempi. Possibili forme delle tabelle di Young relative ad un endomorfismo nilpotente.
Esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***20 marzo 2013***

Esercizi sulla diagonalizzabilitá e la forma canonica di Jordan.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***21 marzo 2013***

Esercizi su Forma di Jordan e sottospazi invarianti.
Prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale: definizione, proprietá, esempi. Prodotto scalare euclideo su R^n. Prodotto scalare (hermitiano) su uno spazio vettoriale complesso: definizione, proprietá, esempi. Prodotto scalare euclideo su C^n.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***26 marzo 2013***

Norma su uno spazio vettoriale reale o complesso. Norma associata ad un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale o complesso. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Ortogonalitá di vettori in un K-spazio vettoriale munito di prodotto scalare e sue proprietá. Ortogonale di un sottospazio vettoriale e sue proprietá. Esempi. Sistemi ortonormali di vettori, basi ortonormali. Esempi. Isomorfismo che preserva i prodotti scalari tra K^n ($K = R$ o $K = C$) e un K-spazio vettoriale munito di prodotto scalare in cui si sia fissata una base ortonormale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 marzo 2013***

Componenti di un vettore rispetto a una base ortonormale, espressione del prodotto scalare attraverso le componenti rispetto ad una base ortonormale. Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, esistenza di basi ortonormali negli spazi vettoriali di dimensione finita. Esempi di costruzione di basi ortonormali con il metodo di Gram-Schmidt. Ortogonale di un sottospazio negli spazi vettoriali di dimensione finita. Esempi.
Matrici ortogonali e loro proprietá. Matrici unitarie e loro proprietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***3 aprile 2013***

Correzione di esercizi su separazione degli autovalori, base di Jordan.
Esempi di matrici ortogonali e unitarie. Enunciato del teorema di caratterizzazione degli endomorfismi di K^n, con $K = R$ o C che sono canonicamente associati a matrici ortogonali (rispett. unitarie).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***4 aprile 2013***

Dimostrazione del teorema di caratterizzazione degli endomorfismi di K^n, con $K = R$ o C che sono canonicamente associati a matrici ortogonali (rispett. unitarie).
Endomorfismi autoaggiunti di K^n e matrici associate canonicamente. Le radici del polinomio caratteristico di un endomorfismo autoaggiunto di K^n, con $K = R$ o $K = C$, sono tutte reali e gli autospazi relativi ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali. Se ϕ é un endomorfismo autoaggiunto di K^n, allora esiste una base ortonormale di K^n costituita da autovettori di ϕ; in particolare ogni endomorfismo autoaggiunto é un endomorfismo semplice.
Esercizio: ricerca delle matrici $X, 3 \times 3$ tali che $X^2 = A$ con A matrice 3×3 con tre autovalori distinti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 aprile 2013***

Se ϕ é un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale V di dimensione finita munito di prodotto scalare, allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di ϕ. Se $A \in C^{n,n}$ é una matrice hermitiana, allora esiste una matrice unitaria $P \in C^{n,n}$ tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. Se $A \in R^{n,n}$ é una matrice simmetrica, allora esiste una matrice ortogonale $P \in R^{n,n}$ tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
Applicazioni bilineari su un K-spazio vettoriale V. Un'applicazione bilineare $V \times V \to K$ é determinata dai valori assunti sulle coppie di elementi di una base di V. Matrice $n \times n$ (dove $n = dim_K V$) associata, rispetto ad una base di V, ad un'applicazione bilineare su V. Esempi. Corrispondenza biunivoca tra forme bilineari su V (con $dim_K V = n$) e matrici di $K^{n,n}$, fissata una base di V. Struttura di K-spazio vettoriale sull'insieme $Bil(V)$ delle applicazioni bilineari su V. Isomorfismo di K-spazi vettoriali tra $Bil(V)$ e $M^{n,n}(K)$, una volta fissata una base di V. Matrice associata ad una stessa applicazione bilineare rispetto a basi diverse.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***10 aprile 2013***

Matrici congruenti e loro proprietá. Le matrici associate ad una stessa forma bilineare rispetto a basi diverse sono congruenti. Rango di una forma bilineare.
Forme bilieari simmetriche e antisimmetriche e matrici associate.
Ortogonalitá rispetto a una forma bilineare simmetrica. Forme bilineari degeneri e non degeneri. Radicale di uno spazio vettoriale su cui é definita una forma bilineare simmetrica. Vettori isotropi. Per ogni vettore non isotropo $v \in V$, lo spazio vettoriale V si puo' scrivere come somma diretta di $< v >$ e del suo ortogonale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 aprile 2013***

Esercizi su applicazioni lineari e spazi di applicazioni lineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***16 aprile 2013***

Forma quadratica su un K-spazio vettoriale associata a una forma bilineare simmetrica. Forma bilineare polare di una forma quadratica. Matrice associata alla forma quadratica rispetto ad una fissata base di V.
Base diagonalizzante per una forma bilineare simmetrica. Teorema di esistenza di una base diagonalizzante per una forma bilineare simmetrica. Ogni matrice $A \in K^{n,n}$ simmetrica é congruente ad una matrice diagonale. Esempi ed esercizi.
Forma canonica per forme quadratiche su un K-spazio vettoriale di dimensione finita, con K campo algebricamente chiuso. Classi di congruenza di matrici simmetriche su un campo algebricamente chiuso. Forma canonica per forme quadratiche su un R-spazio vettoriale di dimensione finita. Segnatura di una forma quadratica reale. Classi di congruenza di matrici simmetriche reali. Segno di una forma quadratica reale. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***17 aprile 2013***

Esercizi su forme bilineari.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 aprile 2013***

Dimostrazione del fatto che la segnatura dipende solo dalla forma quadratica.
Data una forma quadratica $q(x)$ su R^n, associata canonicamente ad una matrice simmetrica A, é possibile determinare una matrice ortogonale speciale $P \in SO(n)$ tale che operando la trasformazione $x = Py$, nell'espressione della forma non compaiano piú i termini rettangolari, ma solo quadrati i cui coefficienti sono gli autovalori di A. Riduzione di una forma quadratica a forma canonica.
Esercizi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***23 aprile 2013***

Esercizi su endomorfismi autoaggiunti, forme bilineari simmetriche e basi diagonalizzanti, quadriche e riduzioni a forma canonica

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***24 aprile 2013***

Esercizi su forme bilineari e forme quadratiche.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***30 aprile 2013***

Traslazioni di uno spazio vettoriale e loro proprietá. Sottovarietá lineari di uno spazio vettoriale. Giacitura di una sottovarietá lineare. Se due sottovarietá lineari sono incidenti la loro intersezione é una sottovarietá lineare di giacitura l'intersezione delle giaciture. Sottovarieá lineari parallele, sottovarietá supplementari. Applicazioni affini tra due spazi vettoriali e loro proprietá. Affinitá di uno spazio vettoriale e loro proprietá. Date due sottovarietá lineari di uno spazio vettoriale V della stessa dimensione esiste sempre un'affinitá di V che muta l'una nell'altra.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***2 maggio 2013***

Esercizi sulle affinitá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***7 maggio 2013***

Risoluzione di esercizi a richiesta degli studenti.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***8 maggio 2013***

Le affinitá conservano il parallelismo e l'incidenza. Esempi ed esercizi. Punti fissi di un'affinitá e sottospazi mutati in sé da un'affinitá. Esempi ed esercizi.
Isometrie affini (movimenti) di uno spazio euclideo. Ogni applicazione di uno spazio euclideo in sé che conserva le distanze é un'isometria affine.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 maggio 2013***

Le isometrie formano un sottogruppo del gruppo delle affinitá. Esercizi sulle affinitá e le isometrie.
Curve algebriche piane. Coniche del piano reale e loro proprietá: rango di una conica,coniche non degeneri e coniche degeneri, coniche a centro e parabole. Attraverso un'isometria é sempre possibile trasformare una conica a centro in una conica di equazione del tipo $ax^2 + by^2 = c$, una conica non a centro in una conica di equazione $ax^2 + by + c = 0$ o di equazione $ax^2 + b = 0$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***14 maggio 2013***

Esempi ed esercizi sulla riduzione a forma canonica delle coniche di R^2 mediante affinitá e mediante isometrie.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 maggio 2013***

Esercizi su affinitá, isometrie, coniche.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***16 maggio 2013***

Risoluzione di esercizi delle prove d'esame di anni precedenti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Davide Aliffi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***21 maggio 2013***

Ricevimento studenti collettivo: risoluzione di esercizi a richiesta degli studenti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***23 maggio 2013***

Ricevimento studenti collettivo: risoluzione di vecchie prove d'esame a richiesta degli studenti.

Ore 3 (9-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***