Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2016/2017*

Scuola di *Scienze*

Corsi di Laurea o di Diploma *Triennale in Matematica (nuovo ordinamento)*

Insegnamento **Geometria I**

Docente titolare del corso **Mirella Manaresi**

Altri docenti partecipanti (modulo) **Monica Idá**

Data inizio Lezioni *27 settembre 2016*

Data fine Lezioni *22 dicembre 2016*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***27 settembre 2016***

Obiettivi del corso, modalita' d'esame, informazioni varie. Introduzione al corso: esempi di sistemi lineari e interpretazione geometrica della ricerca delle loro soluzioni. Applicazioni tra insiemi, applicazioni iniettive, applicazioni suriettive, applicazioni biunivoche. Applicazioni iniettive, suriettive, biunivoche tra insiemi finiti e numero degli elementi di tali insiemi. Composizione di applicazioni. Esempi. Inversa di un'applicazione biunivoca e sue proprietá.
Permutazioni di un insieme. Permutazioni dell'insieme $\{1, ..., n\}$. *Composizione di permutazioni, permutazione inversa. Numero di inversioni di una permutazione, permutazioni pari e permutazioni dispari, segno di una permutazione.*

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***28 settembre 2016***

Esercizio assegnato: ogni trasposizione é una permutazione dispari. Segno di un prodotto di permutazioni, ogni permutazione e la sua inversa hanno lo stesso segno.
Matrici a coefficienti reali. Definizione di determinante di una matrice quadrata. Calcolo del determinante di una matrice 2×2 *e* 3×3.
Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri il suo determinante é nullo.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***29 settembre 2016***

Trasposta di una matrice. Il determinante di una matrice quadrata é uguale al determinante della sua trasposta.
Scambiando fra loro due righe (o due colonne) di una matrice il determinante cambia segno.
Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) uguali é uguale a zero.
Moltiplicando una riga (o una colonna) per λ *il determinante della matrice viene moltiplicato per* λ.
Elementi (vettori) di R^n, *somma di elementi di* R^n, *moltiplicazione di elementi di* R^n *per uno scalare, combinazione lineare di vettori.*

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***30 settembre 2016***

Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) proporzionali é uguale a zero. Se $A^1, \ldots, A^s$ *sono matrici* $n \times n$ *che hanno tutte le righe (colonne) uguali tranne la* h*-esima e* C *é la matrice* $n \times n$ *che ha tutte le righe (colonne) uguali a quelle di* $A^1, \ldots, A^s$ *tranne la* h*-esima, che é la somma delle righe (colonne)* h*-esime di* $A_1, \cdots, A_s$, *allora* $\det C = \det A^1, \ldots, + \det A^s$.
Se B *é la matrice* $n \times n$ *ottenuta sommando alla* h*-esima riga di una matrice* A *una combinazione lineare delle altre righe di* A *allora* $\det B = \det A$.
Complemento algebrico di un elemento di una matrice. Esempi. Enunciato del Teorema di Laplace. Sviluppo di Laplace del determinante secondo una riga o una colonna. Esempio dello sviluppo di una matrice 3×3 *secondo la prima riga.*

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***6 ottobre 2016***

Dimostrazione del Teorema di Laplace. Esempio.
Secondo teorema di Laplace. Esempio.
Somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare; proprietá di somma e prodotto per scalari. Esempi.
Prodotto riga per colonna di matrici. Esempi. Il prodotto tra matrici non é commutativo. Proprietá associativa del prodotto; distributivitá del prodotto rispetto alla somma (dimostrazione lasciata per esercizio).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 ottobre 2016***

Teorema di Binet (solo enunciato). Esempi.
Matrice identica. Matrice inversa di una matrice data, unicitá della inversa (quando esiste).
Una matrice é invertibile se e solo se il suo determinante é diverso da zero. Espressione degli elementi dell'inversa A^{-1} nei coefficienti della matrice A. Esercizi che utilizzano la matrice inversa.
Dipendenza e indipendenza lineare di vettori di $\mathcal{R}^n$. Esempi. I vettori $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi é combinazione lineare degli altri. Esempi.
Se le colonne (o le righe) di una matrice sono vettori linearmente dipendenti il determinante della matrice é zero.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 ottobre 2016***

Rango (caratteristica) di una matrice. Esempi.
Sistemi lineari di m equazioni in n incognite, matrice del sistema, matrice dei termini noti, matrice completa del sistema. Se $m = n$ e la matrice A del sistema ha determinante non nullo, allora il sistema $AX = B$ ha una e una sola soluzione. Regola di Cramer. Esempi.
Un sistema lineare di m equazioni in n incognite é risolubile se e solo se la colonna dei termini noti é combinazione lineare delle colonne della matrice A. Esempi.
Enunciato del teorema di Kroneker e dimostrazione della prima affermazione.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 ottobre 2016***

Dimostrazione deella seconda e della terza affermazione del teorema di Kronecker. Esempi di applicazioni del teorema di Kronecker.
Il rango di una matrice é il massimo numero delle colonne (e delle righe) linearmente indipendenti. Esempi ed esercizi sul rango delle matrici.
Teorema di Rouché-Capelli. Esempi.
Sistemi equivalenti.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***21 ottobre 2016***

Se in un sistema $AX = B$ il rango h della matrice A é uguale al rango della matrice completa e il minore costituito dalle prime h righe e h colonne é diverso da zero, allora il sistema é equivalente al sistema costituito solo dalle prime h equazioni.
Metodo di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari. Esempi ed esercizi.
Sistemi lineari omogenei. Un sistema lineare omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; il sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se il numero delle incognite é strettamente maggiore del rango della matrice dei coefficienti.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***25 ottobre 2016***

Sommando ad una riga una combinazione lineare delle altre righe non si altera il rango di una matrice. Esempi. Matrici ridotte per righe. Se una matrice é ridotta per righe il suo rango é il numero delle righe non nulle. Riduzione di una matrice per righe. Esempi.
Metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari trasformandolo in uno equivalente in cui la matrice dei coefficienti é ridotta per righe. Metodo di eliminazione di Gauss. Esempi ed esercizi.
Definizione di campo, esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***28 ottobre 2016***

Spazi vettoriali su un campo K: definizioni, esempi (K^n, vettori applicati, matrici, polinomi) e prime proprietá.
Sottospazi di uno spazio vettoriale. I sottospazi vettoriali di R^2 sono $\{0\}, R^2$ e le rette per l'origine. I sottospazi vettoriali di R^3 sono $\{0\}, R^3$, le rette per l'origine e i piani per l'origine. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non é un sottospazio vettoriale di R^n, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo é un sottospazio vettoriale di R^n. Esempi di sottospazi vettoriali.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***4 novembre 2016***

L'intersezione di sottospazi é un sottospazio, l'unione insiemistica di sottospazi non é' un sottospazio. Sottospazio somma di due sottospazi. Il sottospazio somma di due sottospazi é il piu' piccolo sottospazio contene i due sottospazi. Somma diretta di sottospazi. La somma di due sottospazi é una somma diretta se e solo se l'intersezione dei due sottospazi é costituita dal solo vettore nullo. Esempi di somme e di somme dirette.
Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale. Esempi. Spazi vettoriali finitamente generati.
Sistemi liberi di vettori di uno spazio vettoriale. Esempi. Caratterizzazione dei sistemi liberi di vettori.
Base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi di uno spazio vettoriale: basi standard per K^n, per lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K, per lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficienti in K di grado minore o uguale a n. Esempi di basi di sottospazi vettoriali di R^3.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***8 novembre 2016***

Esempi di basi per un sottospazio vettoriale.
Sottospazio generato da un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale V. Esempi. Sottospazio generato da un sottinsieme di vettori di uno spazio vettoriale.
Metodo degli scarti successivi per la determinazione di una base a partire da un insieme di generatori di uno spazio vettoriale. Esempi. Completamento di un sistema libero ad una base in uno spazio vettoriale finitamente generato. Esempi.
Un insieme finito di vettori $v_1, \cdots, v_n$ di un K-spazio vettoriale V é una base se e solo se ogni vettore $v \in V$ si puó scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$. Componenti di un vettore rispetto a una base.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***11 novembre 2016***

Il numero degli elementi di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato non dipende dalla scelta della base ed é detto dimensione dello spazio vettoriale. Esempi (dimensione degli spazi vettoriali $M_{m,n}(R)$, dei polinomi di grado $\leq m$ a coefficienti reali, delle matrici simmetriche, delle matrici antisimmetriche, ecc).
Se V é uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $W \subset V$ é un sottospazio vettoriale, allora W ha dimensione finita $m \leq n$ e se $\dim_K W = n$ allora $W = V$.
Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \cdots, v_n$ elementi di V. Allora $v_1, \cdots, v_n$ é una base di V se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema libero di V, se e solo se $v_1, \cdots, v_n$ é un sistema di generatori di V.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 novembre 2016***

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite é un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n - r$, dove r é il rango della matrice dei coefficienti del sistema. Ricerca di una base per tale sottospazio vettoriale di K^n.
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V. Allora $\dim_K(V_1 + \cdots V_n) \leq \dim_K V_1 + \cdots + \dim_K V_n$. Esempio.
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, siano $V_1, \cdots, V_n$ sottospazi vettoriali di V e siano $B_1, \cdots, B_n$ una base per ciascuno di tali sottospazi. Allora la somma $V_1 + \cdots + V_n$ é diretta se e solo se $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ é una base di V, se e solo se $\dim_K V_1 + \cdots + dim_K V_n = \dim_K(V_1 + \cdots + V_n)$. Esempi di basi di un sottospazio vettoriale, di basi di una somma e di un'intersezione di sottospazi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 novembre 2016***

Formula di Grassmann per spazi vettoriali. Esempi di applicazioni di tale formula.
Applicazioni lineari tra spazi vettoriali: definizione ed esempi.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***18 novembre 2016***

Esempi di applicazioni lineari, applicazioni lineari da K^n a K^m.
Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Esempi. Il nucleo di un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ é un sottospazio vettoriale di V, l'immagine é un sottospazio vettoriale di W. Un'applicazione lineare é iniettiva se e solo se il suo nucleo é costituito dal solo vettore nullo.
Correzione della prova di valutazione insieme alle dott. Camilla Felisetti, Annalisa Bagnoli e Lucia Bagnoli.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***22 novembre 2016***

L'immagine di un sottospazio di V in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di W, la controimmagine di un sottospazio di W in un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale di V La composizione di applicazioni lineari é un'applicazione lineare. Isomorfismi. L'insieme $L(V, W)$ di tutte le applicazioni K-lineari da V a W puo' essere munito di una struttura di K-spazio vettoriale. Spazio vettoriale duale di uno spazio vettoriale V.
Ad ogni matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo K puó essere associata un'applicazione lineare da K^n a K^m.
Isomorfismo tra lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in un campo K e lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da K^n a K^m in cui sono state fissate le rispettive basi canoniche. Esempi.
Un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ é nota se si conoscono le immagini dei vettori di una base di V.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***25 novembre 2016***

Esiste ed é unica l'applicazione lineare da V a W che fa corrispondere ordinatamente ai vettori $v_1, \cdots v_n$ di una base di V n vettori fissati $w_1, \cdots, w_n$ di W. Esempi.
In ogni spazio vettoriale V di dimensione finita in cui si fissa una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ si puó stabilire un isomorfismo tra V e K^n. Esempi.
Per ogni applicazione lineare phi tra due spazi vettoriali finitamente generati V e W si ha la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine di ϕ é uguale alla dimensione di V. Esempi di applicazione di questo risultato.

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***29 novembre 2016***

Un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali della stessa dimensione é un isomorfismo se e solo se é un'applicazione iniettiva, se e solo se é un'applicazione suriettiva. Un'applicazione da K^n a K^n é un isomorfismo se e solo se il rango della matrice canonicamente associata é n.
L'immagine di un sottospazio V' del dominio V mediante un'applicazione lineare é un sottospazio vettoriale del codominio di dimensione minore o uguale alla dimensione di V'.
Restrizione di un'applicazione lineare a un sottospazio del dominio. Se V' ún sottospazio di V ed é definita un'applicazione lineare da V' a W, allora esiste un'applicazione lineare da V a W che ristretta a V' coincide con f. Condizioni affinché esista e sia univocamente determinata) un'applicazione lineare che estende due applicazioni lineari definite su sottospazi di uno spazio vettoriale V.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***2 dicembre 2016***

Matrice $M_{F,E}(\phi)$ associata ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ rispetto ad una base E di V e una base F di W. Esempi di matrici associate ad applicazioni lineari rispetto a basi fissate. Espressione dell'applicazione nelle coordinate rispetto alle basi fissate.
Isomorfismo lineare tra $L(V, W)$ e lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici m per n (fissate una base E di V e una base F di W). Esempi. Fissata una base per ciascuno degli spazi vettoriali V, W, Z, alla composizione delle applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi : W \to Z$ corrisponde il prodotto delle matrici associate a ϕ e ψ.
Se $V = W$ nell'isomorfismo tra $L(V, W)$ e $M_n(K)$ agli isomorfismi corrispondono le matrici invertibili.
Matrice del cambio di base in un K-spazio vettoriale V e sue proprietá. Esempi. Matrice di passaggio e componenti di uno stesso vettore nelle due basi. Esempi. Matrice associata a id_V rispetto alle due basi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***6 dicembre 2016***

Matrici associate ad una stessa applicazione lineare $\phi : V \to W$ rispetto a due diverse coppie di basi: teorema del cambio di base. Esempi. Matrici associate ad uno stesso endomorfismo di V rispetto a basi diverse.
Matrici simili. La relazione di similitudine é una relazione di equivalenza su $M_n(K)$. Matrici simili hanno lo stesso determinante e la stessa traccia. Due matrici simili possono essere viste come matrici associate ad uno stesso endomorfismo di V rispetto a basi diverse. Matrici simili hanno lo stesso rango.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***9 dicembre 2016***

Correzione di un problema assegnato: come si possano scegliere le basi in V e W affinche' la matrice associata ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $\dim Im\phi = r$ rispetto a tali basi sia la piú' semplice possibile?
Autovalore di un endomorfismo. Autovettori relativi ad un autovalore. Autospazi. Esempi di autovalori e relativi autospazi.
Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sono autovalori a due a due distinti di un endomorfismo $\phi : V \to V$ e per ogni $i = 1, \cdots, n$, indichiamo con v_i un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ_i, allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é un sistema libero di vettori di V. Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione finita ha al piú n autovalori distinti; se ha esattamente n autovalori distinti, allora esiste una base di V costituita da autovettori di f e la matrice associata a f rispetto a tale base é una matrice diagonale, che sulla diagonale principale ha gli autovalori di f. Endomorfismi diagonalizzabili (semplici).
Ricerca degli autovalori di un endomorfismo di k^n.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***13 dicembre 2016***

Correzione di un problema assegnato sulla scelta ottimale delle basi rispetto alle quali scrivere la matrice associata ad un omomorfismo.
Se $\phi : K^n \to K^n$ é un endomorfismo lineare, A é la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di K^n, allora $\lambda \in K$ é un autovalore di ϕ se e solo se il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$ ha soluzioni non banali, se e solo se $det(A - \lambda I) = 0$.
Polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_n(K)$. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, pertanto si puó definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo ϕ di K^n.
Polinomio caratteristico di un endomorfismo ϕ di un K-spazio vettoriale V di dimensione n. Gli autovalori di ϕ sono radici del polinomio caratteristico di ϕ. Esempi sul campo reale e sul campo complesso.
Radice di un polinomio a coefficienti in un campo K. Molteplicitá di una radice di un polinomio. Legame tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici.
Rilevazione didattica
Ricerca degli autovalori di un endomorfismo.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***15 dicembre 2016***

Determinazione degli autospazi di un endomorfismo.
Se $\phi : V \to V$ *é un endomorfismo di* V*, con* $dim_K V = n$*, e* λ *é un autovalore di* ϕ*, allora la dimensione dell'autospazio* V_λ *é minore o uguale alla molteplicitá di* λ *come radice del polinomio caratteristico di* ϕ*. Esempio in cui la molteplicitá algebrica di un autovalore é strettamente maggiore della dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore. Molteplicitá geometrica di un autovalore.*
Endomorfismi diagonalizzabili (o semplici). Se K *é un sottocampo del campo complesso,* $dim_K V = n$*,* $\phi : V \to V$ *é un endomorfismo di* V*, allora* ϕ *é semplice se e solo se* V *é somma diretta degli autospazi di* ϕ*, se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico di* ϕ *stanno in* K *e le loro molteplicitá algebrica e geometrica coincidono.*
Esempi di endomorfismi diagonalizzabili, determinazione di una base di V *costituita da autovettori di* ϕ*.*

Ore 2 (14-16) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***16 dicembre 2016***

Osservazioni riguardanti autovalori, autospazi, diagonalizzabiliá: la matrice associata a un endomorfismo rispetto a una base di autovettori é una matrice diagonale, che ha sulla diagonale gli autovalori dell'endomorfismo ripetuti tante volte quanto é la loro molteplicitá.
Matrici diagonalizzabili. Se $A \in M_n(K)$ *e* $f : K^n \to K^n$ *é l'endomorfismo associato canonicamente ad* A*, allora* A *é diagonalizzabile se e solo se* f *é un endomorfismo diagonalizzabile. Esempi. Ricerca in esempi concreti di sottospazi mandati in sé da un endomorfismo di cui si conoscono autovalori e autospazi.*

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Cremona***

Data ***20 dicembre 2016***

Esercizi, spiegazioni, chiarimenti a richiesta degli studenti

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***