Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2017/2018*

Scuola di *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea in Matematica**

Insegnamento **Geometria 3**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni 26 settembre 2018

Data fine Lezioni 20 dicembre 2018

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***26 settembre 2017***

Introduzione al corso, modalitá dell'esame, informazioni varie.
Richiami sugli spazi vettoriali euclidei e le loro isometrie. Ogni isometria é composizione di un'isometria lineare e di una traslazione. Isometrie lineari di R^2. Il gruppo delle isometrie del piano euclideo é costituito da traslazioni, rotazioni intorno a un punto fisso, simmetrie rispetto a una retta, prodotti di una simmetria rispetto a una retta e di una traslazione parallela alla retta stessa (glissosimmetrie). Ricerca dei punti fissi, delle rette mutate in sé dalle isometrie.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***27 settembre 2018***

Richiami sulle isometrie lineari di uno spazio euclideo tridimensionale. Isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Punti fissi ed elementi uniti di un'isometria dello spazio. Il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale e' costituito da traslazioni, simmetrie ortogonali rispetto a un piano, composizioni di una simmetria ortogonale rispetto a un piano e una traslazione parallela al piano, rotazioni intorno a una retta, composizione di una rotazioni intorno a una retta con una traslazione parallela alla retta (rototraslazioni), composizione di una simmetria rispetto ad un piano con una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano (rotosimmetrie).
Basi equiorientate di uno spazio vettoriale euclideo V. Scelta di una orientazione su V. Richiami sul prodotto vettoriale su uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Diffeomorfismi tra intervalli aperti della retta reale. Richiami sul teorema di invertibilitá locale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***2 ottobre 2018***

Curve differenziabili parametrizzate: definizione ed esempi. vettore tangente a una curva in un punto. Punti regolari e punti singolari di una curva diff. param. Retta tangente a una curva in un punto regolare. Esempi. Equivalenza di curve differenziabili param. Curve propriamente equivalenti. Curve parametrizzate a velocitá unitaria. Una curva é equivalente a una curva parametrizzata a velocitá unitaria se e solo se é una curva regolare. Versore tangente ad una curva in un punto regolare.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***3 ottobre 2018***

Lunghezza di un arco di curva e sua invarianza per riparametrizzazioni. Parametrizzazioni a velocitá unitaria per rette, circonferenze, eliche cilindriche. Curvatura di una curva parametrizzata a velocitá unitaria. La curvturaé identicamente nulla se e solo se la curva é una retta. Calcolo della curvatura della circonferenza e dell'elica cilindrica. La curvatura é invariante per isometrie. Formula della curvatura per una qualsiasi curva regolare. Normale princiale e piano osculatore a una curva dello spazio, versore binormale alla curva.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***5 ottobre 2018***

Curvatura con segno di una curva piana, sua interpretazione geometria e sua invarianza per movimenti rigidi del piano. Teorema fondamentale per le curve piane (esistenza di un'unica curva differenziabile parametrizzata a velocitá unitaria di cui é assegnato il vettore tangente in un punto e la curvatura con segno). Esempi.
Interpretazione geometria del piano osculatore a una curva dello spazio.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***10 ottobre 2018***

Invarianza della torsione per isometrie dirette. Calcolo del triedro fondamentale e della torsione di un'elica cilindrica. Una curva regolare con curvatura non nulla in ogni punto ha torsione nulla se e solo se é una curva piana. Formule di Frenet-Serret. Forma canonica di una curva regolare con curvatura mai nulla. Proiezioni della curva sul piano osculatore, sul piano normale e sul piano rettificante. Il piano osculatore come posizione limite del piano per tre punti della curva.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***11 ottobre 2018***

Calcolo della torsione di una curva non parametrizzata d'arco. Teorema fondamentale per le curve dello spazio e suoi corollari. Esempi ed esercizi che utilizzano il teorema fondamentale e/o la forma canonica.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***12 ottobre 2018***

Esercizi sulle curve del piano e dello spazio.
Superficie regolare parametrizzata di R^3. Esempi. Superficie regolare di R^3. La sfera unitaria come superficie regolare. Esempi di sottoinsiemi di R^3 che sono superfici regolari ed esempi che non lo sono.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***17 ottobre 2018***

Quadriche di R^3. Riduzione della matrice della quadrica a due possibili tipi mediante un'isometria diretta di R^3. Esempi. Quadriche non degeri e quadriche degeneri. Studio dell'ellissoide, dell'ellissoide immaginario, dell'iperboloide a una falda (piani di simmetria, assi di simmetria, centro di simmetria, casi in cui queste superficie sono di rotazione).

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***18 ottobre 2018***

Le due schiere di rette sull'iperboloide iperbolico. Studio dell'iperboloide ellittico, del paraboloide ellittico e del paraboloide iperbolico (elementi di simmetria, casi in cui queste superficie sono di rotazione). Le due schiere di rette del paraboloide iperbolico. Classificazione euclidea delle quadriche degeneri. Cenno alla classificazione affine delle quadriche. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***19 ottobre 2018***

Superfici di rotazione: esempi ed esercizi. Superfici rigate. definizione ed (elicoide, luogo delle tantanti a una curva sghemba, coni, cilindri).
Esercizi dulle quadriche.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***24 ottobre 2018***

Atlante di una superficie regolare di R^3. Parametrizzazioni equivalenti su una superficie. Piano tangente a una superficie in un punto. Base dello spazio tangente in una parametrizzazione, versore normale relativo a una parametrizzazione, legame tra le basi dello spazio tangente relative a due parametrizzazioni.
Applicazioni differenziabili da una superficie a R^n, applicazioni differenziabili tra due superfici.
Superfici orientabili: definizione e caratterizzazione mediante l'esistenza di un campo differenziabile di versori normali.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***25 ottobre 2018***

Il nastro di Moebius é una superficie non orientabile.
Prima forma fondamentale di una superficie e suoi coefficienti rispetto alla base dello spazio tangente relativo a una parametrizzazione. Coefficienti rispetto a parametrizzazaioni diverse. Espressione della prima forma fondamentale rispetto alla base dello spazio delle forme boilineari simmetriche su T_pS relativa a una parametrizzazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***26 ottobre 2018***

Calcolo dei coeffcienti della prima forma fondamentale per alcune superfici notevoli. Lunghezza di una curva su una superficie. Angolo fra due curve. Sistemi di coordinate ortogonali e sistemi di coordinate conformi. Elemento di area di una superficie. Calcolo dell'area del toro.
Richiami sul differenziale di un'applicazione tra R^n e R^m, lo spazio tangente a una superficie in un punto come immagine di R^2 mediante il differenziale di una parametrizzazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***31 ottobre 2018***

Differenziale di un'applicazione differenziabile tra superfici regolari. Esempi. Diffeomorfismi locali. Esempi. Isometrie locali. Isometrie. Isometria locale tra catenoide ed elicoide, tra un semicono e un piano, tra un cilindro e un piano, tra il luogo delle tangenti a una curva dello spazio e un piano.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***7 novembre 2018***

Correzione degli esercizi n. 3,...,9 e parte del n. 10 del foglio N. 2.

Ore 2 (8-10) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***8 novembre 2018***

Correzione della seconda parte dell'esercizio 10 del foglio n. 2.
Applicazioni conformi e localmente conformi tra superficie. Esempio. Applicazioni equiareali tra superficie. La proiezione di Archimede tra sfera e cilindro.
Curve su una superficie. Curvatura normale e curvatura geodetica in un punto di una curva regolare su una superficie regolare S.
Seconda forma fondamentale di una superfcie S in un punto e sua matrice associata rispetto alla base di T_PS relativa a una parametrizzazione. Legame tra le matrici associate rispetto a due parametrizzazioni diverse.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***9 novembre 2018***

Richiami sugli operatori autoaggiunti di uno spazio vettoriale euclideo: matrice associata rispetto a una base ortonormale, teorema spettrale in due formulazioni equivalenti.
Endomorfismo di Weingarten e suoi autovalori e autovettori. Curvature principali, curvatura Gaussiana e cuvatura media di una superficie regolare in un punto. Matrice dell'endomorfismo di Weingarten rispetto alla base di $T_PS$relativa a una parametrizzazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***13 novembre 2018***

Calcolo della matrice della seconda forma fondamentale e dell'endomorfismo di Weingarten, della curvatura gaussiana e della curvatura media per un piano e per il grafico di una funzione differenziabile, per un cilindro, per una superficie di rotazione (in particolare per il toro), Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari di una suerficie. Punti ombelicali.
Comportamento della prima e della seconda forma fondamentale, della curvatura Gaussiana e della curvatura media per movimenti rigidi e per dilatazioni.
Mappa di Gauss e suo differenziale: definizione ed esempi (piano e sfera).

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***14 novembre 2018***

Soluzione dell'esercizio 11 del foglio N. 2.
Differenziale della mappa di Gauss di un cilindro circolare retto, di un parabolide iperbolico e (per esercizio) di un paraboloide ellittico. Il differenziale della mappa di Gauss é $-W$, dove W é l'operatore di Weingarten. Curvatura normale lungo una direzione del piano tangente. Teorema del Meusnier. Formula di Eulero. Linee di curvatura e loro caratterizzazione. Linee asintotiche.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***15 novembre 2018***

Comportamento di una superficie nell'intorno di un punto ellittico, iperbolico, parabolico, planare. Esempi. Superfici con curvatura costante positiva, negativa, nulla. Interpretazione della curvatura Gaussiana come limite di rapporto di aree.
Espressione della curvatura Gaussiana attraverso la formula di Brioschi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***16 novembre 2018***

Teorema Egregium di Gauss. Condizioni di compatibilitá tra i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale date dalla formula di Brioschi. Esempi.
Campi di vettori lungo una curva di una superficie. Derivata di una funzione lungo un vettore tangente. Derivata covariante di un campo di vettori lungo un vettore tangente e sue proprietá. Se si conoscono le derivate covarianti dei campi di vettori di una base in una parametrizzazione si conosce la derivata covariante di un qualunque campo lungo un qualunque vettore.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***21 novembre 2018***

Simboli di Christoffel. I simboli di Christoffel e, quindi, derivata covariante dipendono solo dalla prima forma fondamentale. Calcolo dei simboli di Chritoffel per coordinate ortogonali, per una superficie di rotazione e per il semipiano di Poincaré.
Campo vettoriale parallelo lungo una curva. Data una curva su una superficie S e un vettore v_0 tangente alla superficie nel punto iniziale della curva esiste uno e un solo campo di vettori $X(t)$ parallelo lungo la curva che nel punto al punto iniziale della curva associa v_0. Sistema di equazioni differenziali che determinano il campo. La nozione di campo vettoriale parallelo dipende solo dalla prima forma fondamentale, il trasporto parallelo dipende anche dalla curva. L'applicazione τ_γ e sue proprietá (é un'applicazione lineare, é un'isometria di spazi vettoriali, é invariante per isometrie).

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***22 novembre 2018***

Esempi di trasporto parallelo di un vettore lungo un parallelo della sfera unitaria, lungo rette verticali e orizzontali del semipiano di Poincaré.
Geodetica su una superficie. Un'isometria locale porta geodetiche in geodetiche. la nozione di geodetica dipende dalla parametrizzazione e non solo dalla traccia della curva. Legame tra due parametrizzazioni rispetto alle quali una curva e' una geodetica. Geodetiche su una superficie immersa. Caratterizzazione delle curve con curvatura sempre non nulla che sono geodetiche.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***23 novembre 2018***

Sistema di equazioni differenziali delle geodetiche. Esempi: piano, sfera, cilindro, cono 8per esercizio), superfici di rotazione. Teorema di Clairaut. Le rette verticali sono geodetiche nel semipiano di Poincaré. Isometrie del seminiano di Poincaré. le emicirconferenze con centro sulla retta $v = 0$ sono geodetiche del semipiano di Poincaré.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***28 novembre 2018***

Alcune considerazioni sulle superfici astratte e sulla loro immergibilitá nello spazio euclideo tridimensionale.
Rette verticali e semicirconferenze sono e sole geodetiche del semipiano iperbolico. disco iperbolico e sue geodetiche.
Area di triangoli geodetici nel semipiano iperbolico. La somma degli angoli di un triangolo geodetico del semipiano iperbolico é minore di π.
Triangoli geodetici sulla sfera. Area di una lunetta sferica.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***29 novembre 2018***

Formula dell'area di un triangolo geodetico sulla sfera. La somma degli angoli di un triangolo geodetico della sfera é maggiore di π.
Rilevazione della didattica.
Cenni al teorema di Gauss-Bonnet per un triangolo geodetico su una superficie regolare orientata, al teorema di Gauss-Bonnet locale per una regione semplice di una superficie regolare orientata. Cenni alle triangolazioni e alla caratteristica di Eulero di una superficie compatta. Enunciato del teorema di Gauss-Bonnet globale per una superficie compatta.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***30 novembre 2018***

Esercizi su curvatura gaussiana, curvatura geodetica, curvature principali, curvatura normale, godetiche, linee di curvatura, linee asintotiche (si veda Foglio 3, n.1, 2, 6, 7, 8).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***5 dicembre 2018***

Esercizi su curvatura gaussiana, curvatura geodetica, curvature principali, curvatura normale, godetiche, linee di curvatura, linee asintotiche, isometrie tra superfici (si veda Foglio 3, n. 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***