Mod. 136/1

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Registro delle Lezioni

Anno Accademico *2019/2020*

Scuola di *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea in Matematica**

Insegnamento **Geometria 3**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni 23 settembre 2019

Data fine Lezioni 20 dicembre 2019

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***23 settembre 2019***

Introduzione al corso, modalitá dell'esame, informazioni varie.
Richiami sugli spazi vettoriali euclidei e le loro isometrie. Ogni isometria é composizione di un'isometria lineare e di una traslazione.

Ore 1 (14-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***25 settembre 2019***

Isometrie lineari di R^2. Il gruppo delle isometrie del piano euclideo é costituito da traslazioni, rotazioni intorno a un punto fisso, simmetrie rispetto a una retta, prodotti di una simmetria rispetto a una retta e di una traslazione parallela alla retta stessa (glissosimmetrie). Ricerca dei punti fissi, delle rette mutate in sé dalle isometrie.
Richiami sulle isometrie lineari di uno spazio euclideo tridimensionale. Isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Punti fissi ed elementi uniti di un'isometria dello spazio. Traslazioni, simmetrie ortogonali rispetto a un piano, composizioni di una simmetria ortogonale rispetto a un piano e una traslazione parallela al piano, rotazioni intorno a una retta, composizione di una rotazioni intorno a una retta con una traslazione parallela alla retta (rototraslazioni).

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***26settembre 2019***

Composizione di una simmetria rispetto ad un piano con una rotazione intorno ad una retta ortogonale al piano (rotosimmetrie).
Basi equiorientate di uno spazio vettoriale euclideo V. Scelta di una orientazione su V. Richiami sul prodotto vettoriale su uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Diffeomorfismi tra intervalli aperti della retta reale. Richiami sul teorema di invertibilitá locale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***30 settembre 2019***

Esempi di curve differenziabili parametrizzate. Vettore tangente a una curva in un punto. Punti regolari e punti singolari di una curva diff. param. Retta tangente a una curva in un punto regolare. Esempi. Equivalenza di curve differenziabili parametrizzate. Curve propriamente equivalenti.

Ore 1 (14-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***2 ottobre 2019***

Lunghezza di un arco di curva e sua invarianza per riparametrizzazioni. Parametrizzazioni a velocitá unitaria per rette, circonferenze, eliche cilindriche. Curvatura di una curva parametrizzata a velocitá unitaria. La curvturaé identicamente nulla se e solo se la curva é una retta. Calcolo della curvatura della circonferenza e dell'elica cilindrica. La curvatura é invariante per isometrie. Formula della curvatura per una qualsiasi curva regolare. Normale principale e piano osculatore a una curva dello spazio, versore binormale alla curva.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***3 ottobre 2019***

Curvatura con segno di una curva piana, sua interpretazione geometria e sua invarianza per movimenti rigidi del piano. Teorema fondamentale per le curve piane (esistenza di un'unica curva differenziabile parametrizzata a velocitá unitaria di cui é assegnato il vettore tangente in un punto e la curvatura con segno). Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***7 ottobre 2019***

Interpretazione geometria del piano osculatore a una curva dello spazio. Torsione di una curva dello spazio.
Invarianza della torsione per isometrie dirette. Calcolo del triedro fondamentale e della torsione di un'elica cilindrica. Una curva regolare con curvatura non nulla in ogni punto ha torsione nulla se e solo se é una curva piana. Formule di Frenet-Serret.

Ore 1 (14-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***9 ottobre 2019***

Forma canonica di una curva regolare con curvatura mai nulla. Proiezioni della curva sul piano osculatore, sul piano normale e sul piano rettificante. Il piano osculatore come posizione limite del piano per tre punti della curva. Esercizi che utilizzano la forma canonica di una curva dello spazio. Calcolo della torsione di una curva non parametrizzata d'arco.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***10 ottobre 2019***

Teorema fondamentale per le curve dello spazio e suoi corollari. Esempi ed esercizi che utilizzano il teorema fondamentale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***14 ottobre 2019***

Quadriche di R^3. Riduzione della matrice della quadrica a due possibili tipi mediante un'isometria diretta di R^3. Esempi. Quadriche non degeneri e quadriche degeneri. Studio dell'ellissoide, dell'ellissoide immaginario, dell'iperboloide a una falda (piani di simmetria, assi di simmetria, centro di simmetria, casi in cui queste superficie sono di rotazione).

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***15 ottobre 2019***

Le due schiere di rette sull'iperboloide iperbolico. Studio dell'iperboloide ellittico, del paraboloide ellittico e del paraboloide iperbolico (elementi di simmetria, casi in cui queste superficie sono di rotazione). Le due schiere di rette del paraboloide iperbolico. Classificazione euclidea delle quadriche degeneri. Cenno alla classificazione affine delle quadriche. Esempi.

Ore 2 (11-13) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***16 ottobre 2019***

Superficie regolare parametrizzata di R^3. Esempi. Superficie regolare di R^3. La sfera unitaria come superficie regolare. Esempi di sottoinsiemi di R^3 che sono superfici regolari ed esempi che non lo sono.
Atlante di una superficie regolare di R^3. Parametrizzazioni equivalenti su una superficie. Piano tangente a una superficie in un punto. Base dello spazio tangente in una parametrizzazione, versore normale relativo a una parametrizzazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***17 ottobre 2019***

La definizione di spazio tangente non dipende dalla parametrizzazione utilizzata. Legame tra le basi dello spazio tangente relative a due parametrizzazioni. Versori normali relativi a due diverse parametrizzazioni.
Applicazioni differenziabili da una superficie a R^n, applicazioni differenziabili tra due superfici.
Superfici orientabili: definizione e caratterizzazione mediante l'esistenza di un campo differenziabile di versori normali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***21 ottobre 2019***

Dimostrazione dell'equivalenza tra le due definizioni di orientabilitá. Il nastro di Moebius non é orientabile.
Esercizio assegnato nelle lezioni precedenti: atlante della sfera dato dalle proiezioni stereografiche dai due poli.

Ore 1 (14-15) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***23 ottobre 2019***

Prima forma fondamentale di una superficie e suoi coeffficienti rispetto alla base dello spazio tangente relativo a una parametrizzazione. Coefficienti rispetto a parametrizzazaioni diverse. Espressione della prima forma fondamentale rispetto alla base dello spazio delle forme bilineari simmetriche su T_pS relativa a una parametrizzazione.
Calcolo dei coeffcienti della prima forma fondamentale per alcune superfici notevoli. Lunghezza di una curva su una superficie. Calcolo della lunghezza di un arco di curva sul paraboloide iperbolico. Angolo fra due curve di una superficie.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***24 ottobre 2019***

Calcolo dell'angolo tra due curve sul paraboloide iperbolico. Sistemi di coordinate ortogonali e sistemi di coordinate conformi.
Elemento di area di una superficie. Calcolo dell'elemento d'area per alcune superfici. Calcolo dell'area di alcune regioni di superfici parametrizzate. Calcolo dell'area del toro.
Richiami sul differenziale di un'applicazione tra R^n e R^m

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***28 ottobre 2019***

Differenziale di un'applicazione differenziabile tra superfici regolari. Esempi. Diffeomorfismi locali. Esempi. Forma bilineare simmetrica $F^* <\, ,\, >_2$ *su* $T_P(S_1)$ *indotta da* $<\, ,\, >_2$ *e da un'applicazione differenziabile* $F : S_1 \to S_2$.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***30 ottobre 2019***

Isometrie locali. Isometrie. Isometria locale tra catenoide ed elicoide, tra un semicono e un piano, tra un cilindro e un piano. Esercizio: scrivere un'isometria locale tra il luogo delle tangenti a una curva dello spazio e un piano.
Applicazioni conformi e localmente conformi tra superficie. Esempio. Applicazioni equiareali tra superficie. La proiezione di Archimede tra sfera e cilindro.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***31 ottobre 2019***

Correzione di due esercizi del foglio 2 su applicazioni differenziabili tra superfici, isometrie locali, orientabilitá.
Curve su una superficie. Curvatura normale e curvatura geodetica in un punto di una curva regolare su una superficie regolare S.
Seconda forma fondamentale di una superficie S *in un punto e sua matrice associata rispetto alla base di* T_PS *relativa a una parametrizzazione. Legame tra le matrici associate rispetto a due parametrizzazioni diverse.*

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***4 novembre 2019***

Richiami sugli operatori autoaggiunti di uno spazio vettoriale euclideo: matrice associata rispetto a una base ortonormale, teorema spettrale.
Endomorfismo di Weingarten e suoi autovalori e autovettori. Curvature principali, curvatura Gaussiana e cuvatura media di una superficie regolare in un punto. Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari di una superficie. Punti ombelicali. Matrice dell'endomorfismo di Weingarten rispetto alla base di T_PS*relativa a una parametrizzazione.*
Calcolo della matrice della seconda forma fondamentale e dell'endomorfismo di Weingarten, della curvatura gaussiana e della curvatura media per un piano e per il grafico di una funzione differenziabile (calcolo da completare).

Ore 2 (12-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***6 novembre 2019***

Completato il calcolo per il grafico di una funzione differenziabile. Comportamento della prima e della seconda forma fondamentale, della curvatura Gaussiana e della curvatura media per movimenti rigidi e per dilatazioni. Calcolo della matrice della seconda forma fondamentale e dell'endomorfismo di Weingarten, della curvatura gaussiana e della curvatura media per un un paraboloide ellittico, un paraboloide iperbolico, un cilindro, una sfera, una superficie di rotazione (calcolo da completare).
Lezione interrotta alle 10.35 per le prove di evacuazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***7 novembre 2019***

Calcolo della curvatura gaussiana del toro e determinazione dei suoi punti ellittici, parabolici, iperbolici.
Mappa di Gauss e suo differenziale: definizione ed esempi (piano, sfera, cilindro circolare retto, paraboloide iperbolico).
Il differenziale della mappa di Gauss é $-W$, dove W é l'operatore di Weingarten. Linee di curvatura e loro caratterizzazione. Curvatura normale lungo una direzione del piano tangente. Teorema del Meusnier.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***13 novembre 2019***

Formula di Eulero.Le curvature principali sono il massimo e il minimo delle curvature normali delle curve per il punto. Linee di curvatura e loro caratterizzazione. Linee asintotiche. Comportamento di una superficie nell'intorno di un punto ellittico, iperbolico, parabolico, planare. Esempi (superficie a sella di scimmia, superficie ottenuta dalla rotazione di una curva con un punto di flesso. Superfici con tutti punti ombelicali. Superfici con curvatura costante positiva e con curvatura costante nulla

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***14 novembre 2019***

Superfici a curvatura costante nulla: calcolo dei coefficienti delle due forme fondamentali e della curvatura della la pseudosfera di Beltrami. Superfici rigate e loro curvatura. Interpretazione della curvatura Gaussiana come limite di rapporto di aree.
Parte dei calcoli per esprimere la curvatura Gaussiana attraverso la formula di Brioschi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***21 novembre 2019***

Espressione della curvatura Gaussiana attraverso la formula di Brioschi.
Teorema Egregium di Gauss. Condizioni di compatibilitá tra i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale date dalla formula di Brioschi. Esempi.
Campi di vettori lungo una curva di una superficie. Derivata di una funzione lungo un vettore tangente. Derivata covariante di un campo di vettori lungo un vettore tangente.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***22 novembre 2019***

Espressione della derivata covariante in coordinate locali. Proprietá della derivata covariante. Se si conoscono le derivate covarianti dei campi di vettori di una base in una parametrizzazione si conosce la derivata covariante di un qualunque campo lungo un qualunque vettore.
Simboli di Christoffel. I simboli di Christoffel e, quindi, derivata covariante dipendono solo dalla prima forma fondamentale. Calcolo dei simboli di Chritoffel per coordinate ortogonali, per una superficie di rotazione e per il semipiano di Poincaré.
Definizione di campo vettoriale parallelo lungo una curva.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***25 novembre 2019***

Data una curva su una superficie S e un vettore v_0 tangente alla superficie nel punto iniziale della curva esiste uno e un solo campo di vettori $X(t)$ parallelo lungo la curva che al punto iniziale della curva associa v_0. Sistema di equazioni differenziali che determinano il campo. La nozione di campo vettoriale parallelo dipende solo dalla prima forma fondamentale, mentre il trasporto parallelo dipende anche dalla curva. L'applicazione τ_γ e sue proprietá (é un'applicazione lineare, é un'isometria di spazi vettoriali, é invariante per isometrie tra due superfici).

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***27 novembre 2019***

Esempi di trasporto parallelo di un vettore lungo un parallelo della sfera unitaria, lungo rette verticali e orizzontali del semipiano di Poincaré.
Geodetica su una superficie. Un'isometria locale porta geodetiche in geodetiche. la nozione di geodetica dipende dalla parametrizzazione e non solo dalla traccia della curva. Legame tra due parametrizzazioni rispetto alle quali una curva e' una geodetica. Geodetiche su una superficie immersa. Caratterizzazione delle curve con curvatura sempre non nulla che sono geodetiche.
La curvatura geodetica puó essere definita anche sulle superfici astratte.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***28 novembre 2019***

Sistema di equazioni differenziali delle geodetiche. Esempi: piano, sfera, cilindro, cono , superfici di rotazione. Geodetiche sul toro. Teorema di Clairaut.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***2 dicembre 2019***

Dimostrazione del Teorema di Clairaut. Le rette verticali sono geodetiche nel semipiano di Poincaré. Isometrie del seminiano di Poincaré (traslazioni orizzontali, omotetie, traformazioni di Möbius. Le semicirconferenze con centro sulla retta $v = 0$ sono geodetiche del semipiano di Poincaré.
Rette verticali e semicirconferenze sono e sole geodetiche del semipiano iperbolico. Il semipiano iperbolico come modello di geometria non euclidea.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***4 dicembre 2019***

Esercizio: presi due punti del semipiano di Poincaré posso sempre trovare un'isometria che li porti su una retta verticale. Superfici astratte e loro immersioni in R^3. Superfici riemanniane e loro immersioni isometriche in R^3. Enunciato del teorema di Hilbert. Disco iperbolico e sue geodetiche. Isometria con il semipiano iperbolico.
Triangoli geodetici su una superficie. Triangoli "ideali". Area di triangoli geodetici "ideali" nel semipiano iperbolico.
Rilevazione della didattica

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***5 dicembre 2019***

Area di triangoli geodetici nel semipiano iperbolico. La somma degli angoli di un triangolo geodetico del semipiano iperbolico é minore di π.
Triangoli geodetici sulla sfera. Area di una lunetta sferica. Formula dell'area di un triangolo geodetico sulla sfera. La somma degli angoli di un triangolo geodetico della sfera é maggiore di π.
Cenni al teorema di Gauss-Bonnet per un triangolo geodetico su una superficie regolare orientata, al teorema di Gauss-Bonnet locale per una regione semplice di una superficie regolare orientata. Cenni alle triangolazioni e alla caratteristica di Eulero di una superficie compatta. Enunciato del teorema di Gauss-Bonnet globale per una superficie compatta.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VII piano***

Data ***9 dicembre 2019***

Correzione di alcuni esercizi dei fogli 3 e 4.

Ore 1 (13-14) ***Firma (Mirella Manaresi)***