Laurea Magistrale in Matematica A.A 2009/10

Corso di Metodi Geometrici per le Applicazioni (II parte)

prof M. Manaresi **Foglio n. 2**

1. Sia S una superficie regolare, $C \subset S$ una curva su S. Provare che: (a) se C è contemporaneamente una linea di curvatura e una geodetica, allora C è una curva piana; (b) se una geodetica (non rettilinea) è una curva piana, allora è una linea di curvatura; (c) Dare un esempio di linea di curvatura che è una curva piana ma non è una geodetica

2. Sia T il toro generato dalla rotazione della circonferenza $\begin{cases}(x-a)^2+z^2=r^2 \\ y=0\end{cases}$ attorno all'asse z, $0<r<a$.
I paralleli generati dai punti $(a+r,0)$, $(a-r,0)$, (a,r) sono detti parallelo massimo, minimo, superiore rispettivamente. Si stabilisca quale di questi paralleli è (a) una geodetica, (b) una linea di curvatura. (c) Si calcoli la curvatura geodetica del parallelo superiore.

3. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione $z=xy$. (i) ~~Si calcoli la curvatura geodetica della curva $\alpha(t)=(t,t^2,t^3)$ di S.~~ (ii) Si scrivano le equazioni di una geodetica per il punto $P=(1,-1,1)$.

4. ~~Si intersechi il cilindro S: $x^2+y^2=1$ con un piano π passante per l'asse x e formante un piano angolo θ con il piano xy. Posto $C=\pi \cap S$, si faccia~~

che ~~tale~~ curva ~~è~~ un' ~~ellisse~~ e se ne ~~calcoli la~~ curvatura ~~geodetica~~ nei ~~punti~~ in ~~cui~~ ~~interseca~~ i ~~propri~~ assi.

(5) Si provi che se tutte le geodetiche di una superficie connessa sono curve piane allora la superficie è contenuta in un piano o in una sfera. (suggerimento: si usi la parte (b) dell'esercizio 1 e la prop 4 pag 147 del Do Carmo)

(6) Calcolare la caratteristica di Eulero - Poincaré delle seguenti superficie:

$$S_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \}$$

$$S_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^{10} + z^6 = 1 \}$$

(7) Sia $S = \{ (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \ \cos\varphi) \ / \ \theta, \varphi \in [0, 2\pi] \}$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ e sia $P \subset S$ il poligono delimitato dalle curve C_1, C_2, C_3, C_4 dove

$$C_1 \begin{cases} \theta = t \\ \phi = \frac{\pi}{4} \end{cases} t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] ; \quad C_2 = \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \phi = t \end{cases} t \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}] ; \quad C_3 = \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} - t \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] ;$$

$$C_4 \begin{cases} \phi = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - t \end{cases} t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] .$$

Si calcoli l'area di P e tutti i termini che intervengono nella formula di Gauss-Bonnet.

(8) Sia v un campo di vettori nel piano e P un suo punto singolare isolato. Può succedere che l'indice del campo nel punto sia zero?

(9) Si stabilisca se per le seguenti coppie di superficie esiste un'isometria locale:

(a) Toro T di cui all'esercizio 2 e $S = \{ z^2 = x^2 + y^2, \ z > 0 \}$

(b) S e S^2 = sfera unitaria

(c) S e $\tilde{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-y)^2 + (y-z)^2 = 1 \}$