CdL in Scienze geologiche e Scienze naturali - Università di Bologna
A.A. 2018-19

Foglio di esercizi n.3

Algebra lineare

SOLUZIONI

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare, se possibile,

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot B, \quad B \cdot C, \quad A \cdot c, \quad A \cdot c^T, \quad B \cdot w$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 32 \\ -1 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot c^T = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad B \cdot w = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le altre moltiplicazioni non sono possibili.

2. Calcolare $|c|,\ |v|,\ |w|,\ v \cdot v,\ v + u,\ v \cdot w,\ v \wedge u,\ |v \wedge u^T|$.

$$|c| = 5,\ |v| = \sqrt{10},\ |w| = \sqrt{6},\ v \cdot v = |v|^2 = 10,\ v + u = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v \cdot w = -5,\ v \wedge u = \begin{pmatrix} 4 & -20 & 12 \end{pmatrix},\ |v \wedge u| = 4\sqrt{35}$$

3. I vettori v e u sono paralleli? Sono ortogonali?

Non sono paralleli. Infatti dovrebbero essere linearmente dipendenti, quindi uno multiplo dell'altro; equivalentemente $|v \wedge u| \neq 0$ mentre il prodotto vettoriale di vettori paralleli è nullo.

Sono ortogonali infatti $v \cdot u = 0$.

4. Calcolare, se possibile,

$$det(A),\ det(B),\ det(C),\ A^{-1},\ B^{-1},\ C^{-1},\ rg(A),\ rg(B),\ rg(C)$$

$$det(A) = 5,\ det(C) = 0\ (la\ terza\ riga\ \grave{e}\ il\ doppio\ della\ seconda)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ rg(A) = 2,\ rg(B) = 2,\ rg(C) = 2$$

5. Determinare se il sistema $A \cdot x = 0$ è un sistema di Cramer e risolverlo.

   Sì è un sistema di Cramer perchè A è quadrata con determinante non nullo. La soluzione è unica ed ovviamente è il vettore nullo.

6. Determinare se il sistema $C \cdot x = w$ ha soluzioni e risolverlo.

   Sì ha soluzioni perchè sia la matrice incompleta che la matrice completa hanno rango 2. Le soluzioni saranno ∞^1 cioè dipenderanno da un parametro (una retta).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   è un minore non nullo quindi posso considerare solo le prime 2 equazioni e le prime due variabili (considero z=t come parametro)

$$\begin{cases} 2x = -1 - t \\ -x + 2y = 1 - 4t \end{cases}$$

   questo è un sistema di Cramer e quindi è risolubile. Soluzione:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}t \\ z = t \end{cases}$$

7. Determinare la matrice canonicamente associata all'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x - 2y, 5x + z)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Determinare la matrice canonicamente associata ad una rotazione del piano di 60^0 di centro l'origine e determinare l'immagine del vettore $(-2, 4)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$$