Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

2018

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 218/19 - N1

1. Si stabilisca se l'applicazione $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$ é una parametrizzazione della parabola di equazione $y = x^2$.

2. Una circonferenza di raggio 1 rotola sull'asse x. La curva descritta da un punto P della circonferenza durante questo movimento é detta *cicloide.*

   a) Si scriva una curva parametrizzata $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la cui traccia sia la cicloide.

   b) Si calcoli la lunghezza dell'arco di cicloide corrispondente a una rotazione completa del disco.

3. Nello piano riferito a coordinate cartesiane Oxy, sia $OA = 2a$ il diametro di una circonferenza S^1 (dove $A = (2a, 0)$) e l'asse y e la retta r parallela all'asse y per il punto A siano le tangenti alla circonferenza in O e in A rispettivamente. Si disegni una semiretta l per O che incontri la circonferenza S^1 in C e la retta r in B. Su OB si disegni il segmento $OP = CB$. Quando la semiretta l ruota intorno a O, il punto P descrive una curva detta *cissoide di Diocle.*

   a) Indicando con θ l'angolo fra l'asse x e la semiretta l, si provi che la traccia della curva parametrizzata $\alpha(t) = (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})$, $t \in \mathbb{R}$, dove $t = tan\,\theta$, é la cissoide di Diocle.

   b) Si determinino i punti singolari della cissoide di Diocle.

   c) Si mostri che quando t tende a infinito, $\alpha(t)$ si avvicina alla retta $x = 2a$ e $\alpha'(t) \to (0, 2a)$. Cosí, quando $t \to \infty$ la curva e la sua tangente si avvicinano alla retta $x = 2a$, ossia $x = 2a$ é un asintoto della cissoide.

4. Si determini la curvatura con segno delle seguenti curve piane:

a) la parabola di equazione $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

b) l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$,

c) l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

5. Data la curva parametrizzata (elica cilindrica) $\gamma(s) = (rcos\frac{s}{a}, rsen\frac{s}{a}, h\frac{s}{a})$, $s \in \mathbb{R}$, dove $a^2 = r^2 + h^2$.

   a) Provare che il parametro s é la lunghezza d'arco.

   b) Determinare la curvatura e la torsione di γ, i versori $t(s), n(s), b(s)$, il piano osculatore, il piano normale e il piano rettificante di γ.

   c) Provare che le rette contenenti $n(s)$ e $\gamma(s)$ incontrano l'asse z con un angolo costante uguale a $\frac{\pi}{2}$.

   d) Provare che le tangenti a γ formano un angolo costante con l'asse z.

6. Data la curva parametrizzata $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $\quad t \in \mathbb{R}$ (cubica gobba), se ne calcoli il triedro fondamentale, la curvatura e la torsione.

7. Sia γ una curva parametrizzata di $\mathbb{R}^3$ con curvatura costante $k > 0$ e torsione nulla. Allora γ é parte di una circonferenza.

8. Se γ é una curva parametrizzata con curvatura e torsione costanti, allora γ é parte di un'elica cilindrica.

9. Si consideri la mappa

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0\,. \end{cases}$$

   a) Si provi che α é una curva differenziabile parametrizzata regolare per ogni t.

   b) Si calcoli la curvatura di α, determinando i punti in cui si annulla. In particolare si mostri che $\alpha(0) = 0$.

   c) Si mostri che il limite dei piani osculatori per $t \to 0$, $t > 0$, é il piano $y = 0$, mentre il limite dei piani osculatori per $t \to 0$, $t < 0$ é il piano $z = 0$.

   d) Si provi che la curvatura τ puó essere definita e risulta $\tau = 0$ anche se α non é una curva piana.

10. Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata d'arco con curvatura $k(s) \neq 0$ per ogni $s \in (a, b)$. Sia π un piano che soddisfa le seguenti condizioni:

    i) π contiene la retta tangente in s,

    ii) dato un intorno aperto J di s in (a, b) esistono punti $\gamma(s)$ con $s \in J$ da entrambi i lati di π.

    Si provi che π é il piano osculatore a γ in s.

11. Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata d'arco con curvatura $k(s) \neq 0$ per ogni $s \in (a, b)$. Si provi che:

    a) il piano osculatore a γ in s é la posizione limite del piano passante per $\gamma(s), \gamma(s + h_1), \gamma(s + h_2)$ quando $h_1, h_2 \to 0$.

    b) la posizione limite della circonferenza passante per $\gamma(s), \gamma(s+h_1), \gamma(s+h_2)$ quando $h_1, h_2 \to 0$ é una circonferenza sul piano osculatore a γ in s il cui centro é sulla retta che contiene $n(s)$ e il cui raggio é $\frac{1}{k(s)}$. (Questo cerchio é detto *cerchio osculatore* di γ in s.)

12. Si provi che se tutte le normali di una curva parametrizzata passano per un punto fisso, allora la traccia della curva é contenuta in una circonferenza.

13. Sia γ una curva regolare parametrizzata d'arco tale che tutte le tangenti passino per un punto fisso.

a) Si provi che la traccia γ é un segmento di retta.

b) La conclusione vale anche se γ non é regolare?

14. Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata d'arco con curvatura $k(s)$ e torsione $\tau(s)$. Si supponga che $\tau(s) \neq 0$ e $k'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché $\gamma(I)$ sia contenuta in una sfera é che
$$R^2 + (R')T^2 = costante$$
dove $R = \frac{1}{k(s)}$, $T = \frac{1}{\tau(s)}$ e R' é la derivata di R rispetto a s.

[Suggerimento: per provare che la condizione é necessaria si derivi tre volte $||\gamma||^2 =$ costante; per provare che la condizione é sufficiente si derivi $\beta(s) = \gamma(s) + Rn(s) - R'Tb(s)$ e si provi che $\beta(s)$ é una costante P_0.]