Università di Bologna - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di GEOMETRIA 3 A.A. 2019/20 - N3

1. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ generata dalla rotazione della curva C di equazioni parametriche
$$\gamma(u) = (x(u), 0, z(u))$$
intorno all'asse z, dove $x(u) \geq 0$ e $x'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$

    a) Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale, la matrice dell'endomorfismo di Weingarten, le curvature principali, la curvatura media e la curvatura gaussiana di S in una parametrizzazione $\sigma(u, v)$.

    b) Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale, la matrice dell'endomorfismo di Weingarten, le curvature principali, la curvatura media e la curvatura gaussiana di S in una parametrizzazione $\sigma(u, v)$ nel caso in cui $\gamma(u) = (x(u), 0, z(u)) = (\mathit{cos}\, u, 0, \mathit{sen}\, u)$.

    c) Si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale, la matrice dell'endomorfismo di Weingarten, le curvature principali, la curvatura media e la curvatura gaussiana di S in una parametrizzazione $\sigma(u, v)$ nel caso in cui
    $$\gamma(u) = (x(u), 0, z(u)) = (R + r\mathit{cos}\,\frac{u}{r}, 0, \mathit{sen}\,\frac{u}{r})$$
    con $0 < r < R$.

2. Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy^2\}$.

    a) Si scriva una parametrizzazione di S e si calcolino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S.

    b) Si dimostri che S ha curvatura gaussiana $K \leq 0$ e si determinino i punti in cui la curvatura gaussiana é nulla.

    c) Si dimostri che il punto $(0, 0, 0)$ é un punto planare di S.

    d) Si determinino le direzioni principali di S nei punti con curvatura gaussiana nulla.

    e) Si dimostri che le curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to S$ date da
    $$\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0, z_0 + ty_0^2), \quad \gamma_2(t) = (e^t x_0, e^{-2t} y_0, e^{-3t} z_0)$$
    sono linee asintotiche passanti per $(x_0, y_0, z_0) \in S$ per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

3. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ generata dalla rotazione della curva C di equazioni $x = 0, z = y^3$, con $-1 < z < 1$, intorno alla retta di equazioni $x = 0, z = 1$.

    a) Si calcolino le curvature principali e la curvatura gaussiana di S nei punti generati dalla rotazione dell'origine.

b) Si studi il comportamento della superficie rispetto al piano tangente affine in uno dei punti di cui alla domanda precedente.

4. Sia S la superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ di parametrizzazione globale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

   a) Si determinino i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale e la curvatura gaussiana di S.

   b) Sia $\gamma : (-1, 1) \to S$ una curva di S tale che $\gamma(0) = (0, 0, 0) \in S$. Si stabilisca quale puó essere la curvatura normale di γ nell'origine.

5. Sia S il paraboloide di rotazione

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = x^2 + y^2\}.$$

   a) Si calcoli la curvatura Gaussiana e la curvatura media di S in tutti i punti.

   b) Si calcolino le direzioni principali di S nei punti del supporto della curva $\gamma(t) = (2cos\, t, 2sen\, t, 4)$.

   c) Si calcoli la curvatura geodetica dei paralleli di S.

6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la metá superiore della pseudosfera ottenuta ruotando intorno all'asse z la metá superiore della trattrice data da

$$\gamma(t) = (sen\, t, 0, cos\, t + log\, tan(\frac{t}{2})).$$

   In particolare S é il sostegno della superficie immersa $\sigma : (\frac{\pi}{2}, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t, u) = (sent\, cos\, u, sent\, sen\, u, cos\, t + log\, tan(\frac{t}{2})).$$

   a) Si determini la mappa di Gauss $N : S \to S^2$ indotta da σ.

   b) Si determini il differenziale dN della mappa di Gauss e la curvatura Gaussiana di S.

   c) Si determini la curvatura media di S.

7. Si provi che se una superficie connessa orientabile ha solo punti ombelicali, allora la superficie é contenuta in un piano o in una sfera.