4. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$

dove $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+(y-1)^2 \geq 1,\ y \geq 0\}$

Qui è utile utilizzare le coordinate polari visto che la funzione da integrare non è altro che la coordinata ρ.
L'insieme S è simmetrico, è formato dai punti che sono interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed esterni alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1. Si vede che le due circonferenze si intersecano nei due punti di coordinate polari $(1, \frac{\pi}{6})$ e $(1, \frac{5\pi}{6})$. Visto che la funzione è simmetrica basta calcolare l'integrale nel primo quadrante.
Riscrivendo l'insieme S in coordinte polari otteniamo:

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad diventa \quad \rho \leq 1$$

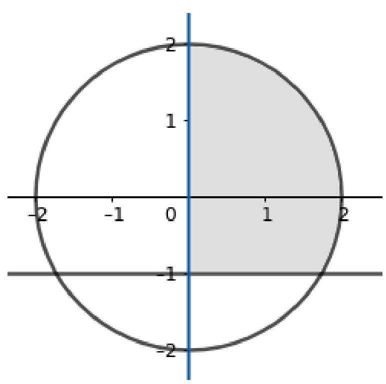
$$x^2+(y-1)^2 \geq 1 \quad cioè \quad x^2+y^2-2y+1 \geq 1$$

$$x^2+y^2 \geq 2y \quad cioè \quad \rho^2 \geq 2\rho sin\theta \quad cioè \quad \rho \geq 2sin\theta$$

Dunque $2sin(\theta) \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$
Bisogna dunque calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2sin\theta}^1 \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2sin\theta}^1 \rho^2 d\rho d\theta$$

6. Calcolare l'area colorata ed il suo baricentro.



Poi, supponendo che la densità sia data da $\rho(x,y) = x$ calcolare la massa dell'area colorata.
SOLUZIONE:

$$A = \{-1 < y < 2\ ,\ 0 < x < \sqrt{4-y^2}\}$$

$$AREA = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy = \int_{-1}^{2}\sqrt{4-y^2}dy$$

facendo il cambio di coordinate $y = 2sin\theta$ e ricordando come si ottiene l'integrale di $cos^2\theta$ si trova che questo integrale vale

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$$

Un modo più semplice per calcolare l'area è questo: dividere l'area colorata mediante il segmento che congiunge l'origine al punto di intersezione tra la retta orizzontale e la circonferenza. L'area è divisa così in un triangololo di area $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e un settore circolare di 120^o che è quindi equivalente ad un terzo dell'area del cerchio, cioè $\frac{4\pi}{3}$.

Il baricentro avrà ascissa:

$$x = \frac{1}{AREA}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} xdxdy$$

basta calcolare

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\ dxdy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-1}^{2}\frac{4-y^2}{2}dy = \frac{9}{2}$$

analogamente per calcolare l'ordinata

$$y = \frac{1}{AREA}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} ydxdy$$

basta calcolare

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y\ dxdy = \int_{-1}^{2} y\sqrt{4-y^2}dy = \left[-\frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} = \sqrt{3}$$

Se invece la densità è data dalla funzione $h(x,y) = x$ la massa dell'area colorata è

$$M = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\ dxdy = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-1}^{2}\frac{4-y^2}{2}dy = \frac{9}{2}$$

che è lo stesso calcolo fatto precedentemente.