

Foglio di esercizi n.13

Integrali

1. Utilizzando gli integrali per il calcolo di volume e superficie di un solido di rotazione dimostrare che il volume di una sfera di raggio fissato r è $\frac{4}{3}\pi r^3$ e la sua superficie è $4\pi r^2$
2. Utilizzando gli integrali per il calcolo di volume e superficie di un solido di rotazione calcolare (se finiti) la superficie e il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse x il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in [1, +\infty[$$

$$S = \int_1^{+\infty} 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f')^2} dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \text{ non converge}$$

$$V = \int_1^{+\infty} \pi f(x)^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi$$

Detta Tromba di Torricelli, è un solido di rotazione di superficie non finita ma volume finito.

https://it.wikipedia.org/wiki/Tromba_di_Torricelli

3. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^{\pi} (x + 3) \sin x \, dx = 6 + \pi \text{ per parti}$$

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx = 6(e^2 - 1) \text{ sostituzione, poi per parti due volte}$$

4. Calcolare l'area colorata, compresa tra i grafici delle funzioni

$$y = \frac{x}{2-x} \quad y = \sqrt[3]{x}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} - \frac{x}{2-x} dx = \frac{7}{4} - \ln(4)$$

5. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^\pi (x+3) \sin x \, dx \qquad \int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$$

6. Calcolare la media nell'intervallo $[1, 4]$ di $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$$\frac{1}{3} \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx = \frac{18}{3}$$

7. Calcolare i seguenti integrali generalizzati ($\alpha \neq 0$ costante):

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 \text{ sostituzione } x = \sin(t)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$$

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \text{ non converge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \text{ sostituzione } e^x = t$$